

关于共形向量场的 Ricci 平均值及应用

何 雅, 吴元芬

(云南师范大学 数学学院, 云南 昆明 650500)

摘要: 共形向量场是微分几何中的一个重要组成部分, 而 Ricci 平均值刻画了黎曼度量与向量场之间的关系, 因此在 n 维紧定向黎曼流形上, 研究了光滑向量场的 Ricci 平均值. 首先运用活动标架法得到共形向量场的性质, 然后结合 $|\xi|^2$ 的拉普拉斯算子得到判断黎曼流形上一个光滑向量场是共形向量场的必要条件, 即若向量场 ξ 是共形向量场, 则关于 ξ 的 Ricci 平均值 $\delta(\xi) \geq 0$. 并且给出了 $\delta(\xi)=0$ 时黎曼流形的分类.

关键词: 黎曼流形; 共形向量场; Ricci 平均值; 必要条件

中图分类号: O186.13 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674 - 5639 (2021) 03 - 0067 - 04

DOI: 10.14091/j.cnki.kmxyxb.2021.03.014

The Ricci Mean Value of Conformal Vector Fields and Application

HE Ya, WU Yuanfen

(College of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming, Yunnan, China 650500)

Abstract: The Conformal vector field is an important part of differential geometry, the Ricci mean value describes the relationship between Riemannian measure and vector field, therefore the Ricci mean value of smooth vector fields on n -dimensional compact oriented Riemannian manifolds was studied. Firstly, the properties of conformal vector fields are obtained by using the method of moving frame, and then we get the necessary condition for a smooth vector field to be a conformal vector field on Riemannian manifold by combining the Laplacian of $|\xi|^2$, that if a vector field ξ is a conformal vector field, then the Ricci mean of ξ is greater than or equal to zero, and we give the classification of Riemannian manifolds when it equals to zero.

Key words: Riemannian manifold; conformal vector fields; Ricci mean value; necessary condition

1 主要定理

共形向量场是微分几何中的一个必不可少的组成部分. 若流形 M 上的一个向量场 ξ 所诱导的局部单参数可微变换群是共形变换群, 则称向量场 ξ 是 M 上的一个共形向量场, 下面给出共形向量场的定义^[1].

设 ξ 为黎曼流形 (M^n, g) 上的光滑切向量场, 如果在 M 上存在一个光滑函数 ρ 满足:

$$L_{\xi}g = \frac{2}{n}\rho g,$$

则称 ξ 为共形向量场, 其中 L_{ξ} 是度量 g 关于 ξ 的李导数, ρ 为共形向量场 ξ 的势函数. 特别地, 当 ρ 为零时, ξ 称为 Killing 向量场^[2], 其诱导的局部单参数可微变换群是等距变换群. 若 ξ 是闭的向量场, 那么 ξ 称为闭的共形向量场; 若 ξ 是某个光滑函数的梯度向量场, ξ 则称为共形梯度向量场.

许多作者^[3-4] 研究了具有常纯量曲率, 且存在共形向量场的黎曼流形在一定的条件下等距于欧氏空间中的球, 而黎曼流形上存在共形梯度向量场在文献[5—6] 中已被研究. 本文主要考虑共形向量场的 Ricci 平均值, 下面给出 Ricci 平均值的定义.

设 (M^n, g) 是 n 维黎曼流形, M 上的一个光滑向量场 X 的 Ricci 平均值定义为:

收稿日期: 2019 - 12 - 25

作者简介: 何雅 (1995—), 女, 云南曲靖人, 在读硕士, 主要从事微分几何研究.

$$\delta(X) = \frac{1}{nV} \int_M Ric(X, X) dM,$$

其中 V 为 M 的体积, Ric 为 M 上的 Ricci 张量.

在文献[7] 中, Yano 等证明了如下定理.

定理 1 设 (M^n, g) ($n \geq 2$) 是一个紧定向的黎曼流形, Ric 为 M 上的 Ricci 张量, 若 M 上的共形向量场 ξ 满足 $Ric(\xi, \xi) \leq 0$, 则 ξ 必为平行向量场, 且 $Ric(\xi, \xi) = 0$ 当且仅当 ξ 是 Killing 向量场.

然而, 该定理没有给出 $Ric(\xi, \xi) = 0$ 时流形的分类, 因此, 本文在较弱的假设条件下给出了流形的分类, 于是得到了下面的结果.

定理 2 设 (M^n, g) ($n \geq 2$) 是一个紧定向的黎曼流形, 若 M^n 上存在非零的共形向量场 ξ , 则关于 ξ 的 Ricci 平均值 $\delta(\xi) \geq 0$. 特别地, 当 $\delta(\xi) = 0$ 时, M^n 等距于黎曼积 $\Gamma \times M^{n-1}$, 其中 $\dim \Gamma = 1$.

2 预备知识

本文运用活动标架法进行计算, 并采用 Einstein 求和约定(重复指标表示求和). 设 (M, g) 是 n 维黎曼流形, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是局部单位正交标架场, $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ 是对偶向量场, 规定指标范围 $1 \leq i, j, k, l \leq n$, 则 M 的结构方程为:

$$d\omega_i = \omega_j \wedge \omega_{ji}, \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l = d\omega_{ij} - \omega_{ik} \wedge \omega_{jl}. \quad (2)$$

其中 d 为 M 上的外微分算子, ω_{ij} 与 R_{ijkl} 分别为黎曼度量 g 诱导的联络形式与黎曼曲率.

下面定义 Ricci 曲率和纯量曲率:

$$R_{ij} = \sum_k R_{ikjk}, R = \sum_k R_{kk},$$

显然 Ricci 曲率关于 i, j 是对称的.

设向量场 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, 则 ξ 在单位正交标架场下的表达式为:

$$\xi = \xi_i e_i.$$

向量场 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ 的一阶、二阶协变导数分别定义为:

$$\xi_{i,j}\omega_j = d\xi_i + \xi_j\omega_{ji}, \quad (3)$$

$$\xi_{i,jk}\omega_k = d\xi_{i,j} + \xi_{k,j}\omega_{ki} + \xi_{i,k}\omega_{kj}. \quad (4)$$

对(3) 式两边外微分, 并由结构方程及(3) 式与(4) 式得向量场 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ 的 Ricci 恒等式为:

$$\xi_{i,jk} - \xi_{i,kj} = \xi_l R_{lij k}.$$

向量场 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ 的散度定义为:

$$\operatorname{div}(\xi) = \xi_{i,i},$$

则 ξ 为共形向量场当且仅当

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \frac{2}{n}\rho\delta_{ij}, \quad (5)$$

显然, $\rho = \operatorname{div}(\xi)$.

向量场 ξ 为 Killing 向量场当且仅当 $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$, 向量场 ξ 为平行向量场当且仅当 $\nabla\xi=0$, 即 $\xi_{i,j}=0$. 显然平行向量场为 Killing 向量场.

对(5) 式两边同时求协变导数, 有:

$$\xi_{i,jk} + \xi_{j,ik} = \frac{2}{n}\rho_k\delta_{ij}, \quad (6)$$

由(6) 式有:

$$\xi_{j,ki} + \xi_{k,ji} = \frac{2}{n}\rho_i\delta_{jk}, \quad (7)$$

$$\xi_{k,ij} + \xi_{i,kj} = \frac{2}{n} \rho_j \delta_{jk}. \quad (8)$$

结合(6)式、(7)式和(8)式有:

$$\xi_{i,jk} + \xi_{i,kj} + (\xi_{j,ik} - \xi_{j,ki}) + (\xi_{k,ij} - \xi_{k,ji}) = \frac{2}{n}(\rho_j \delta_{ik} + \rho_k \delta_{ij} - \rho_i \delta_{jk}).$$

由 ξ 的 Ricci 恒等式有:

$$2\xi_{i,jk} = \xi_i(R_{lij} + R_{lji} + R_{lji}) + \frac{2}{n}(\rho_j \delta_{ik} + \rho_k \delta_{ij} - \rho_i \delta_{jk}).$$

通过第一 Bianchi 恒等式, 上式为:

$$\xi_{i,jk} = \xi_i R_{lji} + \frac{1}{n}(\rho_j \delta_{ik} + \rho_k \delta_{ij} - \rho_i \delta_{jk}). \quad (9)$$

3 定理 2 的证明

在证明定理 2 之前, 先证明如下引理.

引理 1 设 (M^n, g) ($n \geq 2$) 是一个紧定向的黎曼流形, 若 M^n 上存在非零的共形向量场 ξ , 则关于 ξ 的 Ricci 平均值 $\delta(\xi) \geq 0$, 特别地, 当 $\delta(\xi) = 0$ 时, ξ 是平行向量场.

证明 取局部单位正交标架场 e_1, e_2, \dots, e_n , 规定指标范围 $1 \leq i, j, l \leq n$, 因为

$$|\xi|^2 = \sum_i \xi_i^2,$$

$$\text{所以} \quad \frac{1}{2} \Delta |\xi|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} ((\xi_i \xi_j)_j)_j = \sum_{i,j} (\xi_i \xi_{i,j})_j = \sum_{i,j} (\xi_{i,j})^2 + \sum_{i,j} \xi_i \xi_{i,jj},$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} \Delta |\xi|^2 = |\nabla \xi|^2 + \sum_{i,j} \xi_i \xi_{i,jj}, \quad (10)$$

$$\text{由(9)式有} \quad \sum_j \xi_{i,jj} = -\xi_i R_{ii} - \frac{n-2}{n} \rho_i. \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式, 有:

$$\frac{1}{2} \Delta |\xi|^2 = |\nabla \xi|^2 - R_{ii} \xi_i \xi_i - \frac{n-2}{n} \rho_i \xi_i = |\nabla \xi|^2 - Ric(\xi, \xi) - \frac{n-2}{n} \langle \nabla \rho, \xi \rangle. \quad (12)$$

因为

$$\operatorname{div}(\rho \xi) = \rho \operatorname{div}(\xi) + \langle \nabla \rho, \xi \rangle,$$

又 $\rho = \operatorname{div}(\xi)$, 所以上式为:

$$\operatorname{div}(\rho \xi) = \rho^2 + \langle \nabla \rho, \xi \rangle,$$

对上式积分, 则

$$\int_M \langle \nabla \rho, \xi \rangle dM = - \int_M \rho^2 dM, \quad (13)$$

$$\text{对(12)式积分, 有:} \quad 0 = \int_M (|\nabla \xi|^2 - Ric(\xi, \xi) - \frac{n-2}{n} \langle \nabla \rho, \xi \rangle) dM,$$

$$\text{把(13)式代入上式, 有:} \quad \int_M Ric(\xi, \xi) dM = \int_M (|\nabla \xi|^2 + \frac{n-2}{n} \rho^2) dM. \quad (14)$$

从(14)式可以得到 ξ 的 Ricci 平均值 $\delta(\xi) \geq 0$, 特别地, 当 $\delta(\xi) = 0$ 时, $\rho = 0$ 且 $\nabla \xi = 0$, 即 ξ 是平行向量场. 引理 1 证毕.

引理 2 设 (M^n, g) ($n \geq 2$) 是黎曼流形, 若 M^n 上存在非零的平行向量场, 则 M^n 可以分解成黎曼积 $\Gamma \times M^{n-1}$, 其中 $\dim \Gamma = 1$.

证明 设 ξ 为 M^n 上非零的平行向量场, 即 $\nabla \xi = 0$, 则对 $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ 有:

$$X |\xi|^2 = X \langle \xi, \xi \rangle = 2 \langle \nabla_X \xi, \xi \rangle = 0,$$

因此

$$|\xi|^2 = c^2,$$

其中 c 为常数.

又因为 ξ 非零, 所以存在 $p \in M^n$ 使得 $\xi(p) \neq 0$, 从而 $c \neq 0$. 因此 $|\xi|^2 \neq 0$ (处处). 取局部标架场 e_1, e_2, \dots, e_n , 使得

$$e_1 = \frac{\xi}{|\xi|} = \frac{1}{c}\xi,$$

规定指标范围为 $1 \leq i, j, k, \dots \leq n$, $2 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n$. 又 $\xi = \xi_i e_i$, 所以有:

$$\xi_1 = c, \xi_\alpha = 0, \quad (15)$$

由协变导数的定义有:

$$\xi_{i,j} \omega_j = d\xi_i + \xi_j \omega_{ji},$$

则 $\nabla \xi = 0$ 当且仅当 $\xi_{i,j} = 0$, 即

$$d\xi_i + \xi_j \omega_{ji} = 0.$$

所以有:

$$d\xi_\alpha + \xi_1 \omega_{1\alpha} = 0. \quad (16)$$

结合(15)式和(16)式有:

$$\omega_{1\alpha} = 0.$$

所以 M^n 有黎曼乘积分解 $\Gamma \times M^{n-1}$. 引理 2 证毕.

本文从 $\Delta |\xi|^2$ 出发, 然后结合共形向量场的性质并化简后得到共形向量场 ξ 的 Ricci 平均值 $\delta(\xi) \geq 0$, 并且 $\delta(\xi) = 0$ 时, ξ 为平行向量场(引理 1). 紧接着, 从平行向量场的定义入手得到了 $\omega_{1\alpha} = 0$, 即具有非零平行向量场的黎曼流形有黎曼乘积分解 $\Gamma \times M^{n-1}$ (引理 2), 结合引理 1 和引理 2 即可得到定理 2.

4 结论

本文在 Yano 和 Boncher 证明定理的过程启发下, 考虑黎曼流形上光滑向量场的 Ricci 平均值, 得到了紧定向黎曼流形上一个光滑向量场 ξ 为共形向量场的必要条件是 $\delta(\xi) \geq 0$, 并且给出了 $\delta(\xi) = 0$ 时黎曼流形的分类, 即此时 M^n 有黎曼乘积分解 $\Gamma \times M^{n-1}$.

[参考文献]

- [1] DESHMUKH S. Geometry of conformal vector fields [J]. Arab J Math Sci, 2017, 23 (1): 44-73.
- [2] YANO K. On harmonic and Killing vector fields [J]. Annals of Mathematics, 1952, 55 (1): 38-45.
- [3] DESHMUKH S, AL-SOLAMY F R. Conformal vector fields and conformal transformations on a Riemannian manifold [J]. Balkan Journal of Geometry & Its Applications, 2012, 17 (1): 9-16.
- [4] 黄琴, 阮其华. 共形向量场与若干刚性定理 [J]. 数学物理学报, 2017, 37 (4): 615-623.
- [5] DESHMUKH S, AL-SOLAMY F R. Conformal gradient vector fields on a compact Riemannian manifold [J]. Colloquium Mathematicum, 2008, 112 (1): 157-161.
- [6] EVANGELISTA I, VIANA E. Conformal gradient vector fields on Riemannian manifolds with boundary [J]. Colloquium Mathematicum, 2019, 123 (5): 375-381.
- [7] YANO K, BOCHNER S. Curvature and betti number [M]. Princeton: Princeton University Press, 1953.

