昆明学院学报 2012, 34(6):22 ~24 CN 53 - 1211/G4 ISSN 1674 - 5639
Journal of Kunming University

一类抛物型方程混合边值问题弱解的存在性和正则性

刘 乐 ,夏子伦,李水莲
(云南民族大学 数学与计算机科学学院,云南 昆明 650500)

摘要:对一类抛物型方程的混合边值问题弱解的存在性和正则性进行了讨论.利用 Lions 定理建立抛物型方程混合边值问题弱解的存在性定理,然后在弱解存在的基础上利用差商方法,通过讨论弱解的导数所属空间来证明弱解的正则性.

关键词:抛物型方程;弱解;存在性;正则性;差商;Lions 定理
中图分类号:O175.26 **文献标识码**:A **文章编号**:1674 - 5639(2012)06 - 0022 - 03

Existence and Regularity of Weak Solution of the Mixed Boundary Value Problem of a Class Parabolic Equations

LIU Le, XIA Zi-lun, LI Shui-lian
(College of Mathematics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Yunnan Kunming 650500, China)

Abstract: The existence of the weak solution and the regularity of the parabolic equations with the mixed boundary value problem are discussed. By using Lions theorem to establish parabolic equation weak solution of mixed boundary value problem existence theorems of weak solutions, then in existence on the basis of using difference quotient method through discussion of weak solution of derivative of space to prove the regularity of weak solutions.

Key words: parabolic equations; weak solution; existence; regularity; difference quotient; theorem of Lions

抛物型方程是偏微分方程中的基本方程之一.在自然科学的众多领域中,可以用抛物型方程或抛物型方程组来描述其许多现象,例如热传导以及其它扩散现象、化学反应、粒子的运输等.这类偏微分方程通常称之为发展型偏微分方程.近年来关于抛物型方程(组)的基本解、古典解、弱解等已有许多学者[1-2]进行了广泛的研究.

在讨论发展型偏微分方程弱解的存在性和正则性时,通常采用 Galerkin 方法及能量估计来讨论(见文献[1,3~4]).在本文中,我们采用处理椭圆型偏微分方程的 Lax-Milgram 定理[5]的想法来处理,这种想法就是 Lions 定理.首先利用 Lions 定理建立抛物型方程混合边值问题弱解的存在性定理,再利用差商性质讨论解 u 的一阶导数来证明其内部正则性.

1 预备知识

考虑如下二阶线性抛物型方程混合问题.

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu = f, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u = 0, & (x,t) \in \Gamma_0 \times (0,T], \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}\nu_j = 0, & (x,t) \in (\partial\Omega - \Gamma_0) \times (0,T], \\ u(t=0) = u_0, & (x,t) \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1}$$

这里 a^{ij}, b^i, c 是光滑的,并与时间 t 无关, $u = u(x,t):[0,T] \to H_0^1(\Omega)$, Ω 是 R^n 中的有界开集, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界,对于 $T > 0$,记 $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, $\Gamma_T = (\overline{\Omega} \times \{t=0\}) \cup (\partial\Omega \times (0,T])$,通常称 Γ_T 为抛物边界. Γ_0 是 $\partial\Omega$ 的一部分, $mes(\Gamma_0) > 0$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.[3]

引入记号 $B[u,v,t] = \int_\Omega [\sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_i b^i(\cdot,t)u_{x_i}v + c(\cdot,t)uv]\mathrm{d}x$,

$\forall u,v \in H_0^1(\Omega)$ 以及 $a.e.\ t \in [0,T]$.

定义空间:

$\Phi = \{\varphi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \mid \varphi(x,T) = 0, x \in \Omega\}$,及其范数 $\|\varphi\|_\Phi =$

收稿日期:2012 - 10 - 15
作者简介:刘乐(1986—),女,江西宜春人,在读硕士,主要从事偏微分方程研究.

$\max\limits_{0\le t\le T}\|\varphi(t)\|_{H_0^1(\Omega)}+\max\limits_{0\le t\le T}\|\varphi_t(t)\|_{L^2}$.

$\Phi_1=C([0,T];H^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$，及其范数 $\|\varphi\|_{\Phi_1}=\|\varphi\|_{\Phi}$，设 u 光滑，取 $\varphi\in\Phi_1,\varphi(x,T)=0$，$x\in\Omega$，用 $\varphi\in\Phi$ 作实验函数同乘(1)式第 1 个方程两边，并在 Ω_T 上积分可得

$$\int_0^T B[u,\varphi,t]\,\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega u\varphi'\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega u_0\varphi(0)\,\mathrm{d}x,\ \forall\varphi\in\Phi_1,\tag{2}$$

称满足(2)式的函数 $u\in C([0,T];H^1(\Omega))$ 为问题(1)的弱解. 要说明这个问题我们首先要引入 Lions 定理. 先引入记号：

$$E(u,\varphi)=-\int_0^T\int_\Omega u\varphi'\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T B[u,\varphi;t]\,\mathrm{d}t,\ (L,\varphi)=\int_0^T\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega u_0\varphi(0)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\varphi'=\varphi_t,\varphi(0)=\varphi(x,0)$. 下面引入 Lions 定理.

定理 1[1]　设 F 是一个 Hilbert 空间，范数 $\|\cdot\|_F$，Ψ 是 F 的一个子空间，对于范数 $\|\cdot\|_\Psi$ 是 Ψ 关于 $(\cdot,\cdot)$ 的一个内积空间，$E(u,\varphi)$ 是定义在 $F\times\Psi$ 上的实双线性型[6]，即

$$E(\alpha u_1+\beta u_2,\varphi)=\alpha E(u_1,\varphi)+\beta E(u_2,\varphi),$$
$$E(u,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha E(u,\varphi_1)+\beta E(u,\varphi_2),$$
$$\forall u,u_1,u_2\in F,\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in\Psi,\alpha,\beta\in R.$$

设1) 存在正常数 C，使得 $\|\varphi\|_F\le C\|\varphi\|_\Psi$，$\forall\varphi\in\Psi$；

2) $\forall\varphi\in\Phi,E(\cdot,\varphi)$ 在 F 上连续；

3) 存在 $\alpha>0$，使得 $E(\varphi,\varphi)\ge\alpha\|\varphi\|_\Psi^2$，$\forall\varphi\in\Psi$，又设 L 是 Ψ 上的一个有界线性泛函，则存在 $u\in F$，使得

$$E(u,\varphi)=L(\varphi)=(L,\varphi),\ \forall\varphi\in\Psi.\tag{3}$$

2　二阶线性抛物型方混合边值问题弱解的存在性

下面给出二阶线性抛物型方程混合边值问题(1)弱解的存在性定理.

定理 2　设 $f\in L^2(0,T;(H^1(\Omega)'),u_0\in L^2(\Omega)$，则问题(1)存在一个弱解 $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 满足积分方程(2).

证明　可以类似第一边值问题的证明，设 $c(x,t)$ 有充分大的正下界 c_0. 即取

$$E(u,\varphi)=-\int_0^T\int_\Omega u\varphi'\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T B[u,\varphi;t]\,\mathrm{d}t,\tag{4}$$

$$L(\varphi)=\int_0^T\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega u_0\varphi(0)\,\mathrm{d}x,\tag{5}$$

$$F=L^2(0,T;H^1(\Omega)),\Phi=\Phi_1.$$

$$\|u\|_F=\left(\int_0^T\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\quad(u,v)_F=\int_0^T\int_\Omega uv\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall u,v\in F,$$

$$\|\varphi\|_\Phi^2=\|\varphi\|_F^2+\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2,\ (\varphi,\varphi)_\Phi=(\varphi,\varphi)_F+(\varphi(0),\varphi(0))_{L^2(\Omega)},$$

其中 Φ 关于 $(\cdot,\cdot)_\Phi$ 是一个内积空间. 显然 $\|\varphi\|_F\le\|\varphi\|_\Phi$，接下来我们证明 E,L 满足 Lions 定理的条件：

1) $\forall\varphi\in\Phi,E(\cdot,\varphi)$ 在 F 上连续.

由线性泛函的有界性与连续性的关系知，在线性空间中，线性泛函 $E(\cdot,\varphi)$ 连续必须且只须 $E(\cdot,\varphi)$ 有界.[6] 又因为

$$E(u,\varphi)\le M\|u\|_F\|\varphi\|_F+M\|u\|_F\|\varphi'\|_F\le M\|u\|_F(\|\varphi\|_F+\|\varphi'\|_F),$$

则 $\forall\varphi\in\Phi,E(\cdot,\varphi)$ 在 F 上连续.

2) 存在 $\alpha>0$，使得 $E(\varphi,\varphi)\ge\alpha\|\varphi\|_\Phi^2$，$\forall\varphi\in\Phi$. 实际上

$$E(\varphi,\varphi)=-\int_0^T\int_\Omega\varphi\varphi'\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T B[\varphi,\varphi;t]\,\mathrm{d}t,$$

因为 $B[\varphi,\varphi,t]=\int_\Omega[a^{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}+b^i\varphi_{x_i}\varphi+c\varphi^2]\,\mathrm{d}x\ge\dfrac{\vartheta}{2}\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+(c_0-\gamma)\int_\Omega|\varphi|^2\mathrm{d}x$. γ 是一正常数.

另一方面

$$-\int_0^T\int_\Omega\varphi\varphi'\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_\Omega\int_0^T\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)'\mathrm{d}t\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_\Omega|\varphi(0)|^2\mathrm{d}x,$$

取 c_0 满足 $c_0-\gamma-\dfrac{\vartheta}{2}>0$，于是有

$$E(\varphi,\varphi)\ge\theta\int_0^T\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\ge\min\{\theta,\frac{1}{2}\}\|\varphi\|_\Phi^2.$$

又因为 $|L(\varphi)|\le\|f\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\le M\|\varphi\|_\Phi$，所以 $L(\varphi)$ 是 Φ 上的一个有界线性泛函，由 Lions 定理可知存在 $u\in F$，$F=L^2(0,T;H^1(\Omega))$，使得

$$E(u,\varphi)=L(\varphi),\ \forall\varphi\in\Phi,$$

即 u 是(2)式的一个弱解.

3 二阶线性抛物型方混合边值问题弱解的正则性

前面讨论的是二阶线性抛物型方程混合边值问题(1)弱解的存在性，u 属于 $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. 接下来讨论它的正则性，即证明 $u' \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

定理 3 设 $f \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$，$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 为问题(1)的弱解，又设 $a^{ij}(x) \in C^1, b^i, c \in L^\infty(\Omega), i,j = 1,\cdots,n$，则 $u \in H^2(\Omega')$ 且对任意的子区域 $\Omega' \subset \Omega$ 有估计

$$\| u \|_{L^2(0,T;H^2(\Omega'))} \le C(\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|f\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}).$$

证明 由弱解的定义

$$\int_0^T B[u,\varphi;t]\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega u\varphi'\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u_0\varphi(0)\mathrm{d}x, \forall \varphi \in \Phi_1,$$

即
$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i}\varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i}\varphi + cu\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega u_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

因此
$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i}\varphi_{x_j}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega u_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega g\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{6}$$

其中
$$g = f - b^i(x)u_{x_i}\varphi + cu\varphi.$$

选取切断函数 $\xi \in C_0^\infty(\Omega):\xi \equiv 1$ 在 Ω' 上，且 $0 \le \xi \le 1$.

令 $\varphi = \Delta_k^{-h}(\xi^2\Delta_k^h)$，$\Delta_k^h = \dfrac{u(x+h\ell_k) - u(x)}{h}$，$(h \in R, h \ne 0)$ 表示 k 个方向步长为 h 的差商.

记
$$A = \int_0^T\int_\Omega (a^{ij}(x)u_{x_i}\varphi_{x_j}\mathrm{d}x\mathrm{d}t, B = \int_0^T\int_\Omega g\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

类似于文献[3]中椭圆弱解的内部正则性中 A,B 的估计，可以得到本文中 A,B 的估计

$$A \geqslant \frac{\theta}{2}\int_0^T\int_\Omega \xi^2|\Delta_k^h \nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - C\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$|B| \leqslant \frac{\theta}{4}\int_0^T\int_\Omega \xi^2 |\Delta_k^h \nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C(\varepsilon)\int_0^T\int_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{8}$$

接下来再讨论 $\int_0^T\int_\Omega u_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，利用差分算子的性质和文献[5]可知

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T\int_\Omega u_t\Delta_k^{-h}(\xi^2\Delta_k^h u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\Delta_k^h u}{\partial t}\xi^2\Delta_k^h u\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\xi^2(\Delta_k^h u)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta_k^h u(x,t))^2\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta_k^h u(x,T))^2\mathrm{d}x \\ &\ge 0.\end{aligned} \tag{9}$$

由(7)式、(8)式、(9)式可知

$$\int_0^T\int_{\Omega'} |\Delta_k^h \nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int_0^T\int_\Omega (f^2 + u^2 + |Du|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由差商的性质知 $Du \in H^1(\Omega)$，因此 $u \in H^2(\Omega)$，且 u 有估计

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le C(\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|f\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}),$$

定理证毕.

事实上，只要系数和非齐次项 f 是光滑的，重复使用上述方法，则可得到弱解是可位于更高阶的 Sobolve 空间中.

[参考文献]

[1]王耀东. 偏微分方程的 L2 理论[M]. 北京:北京大学出版社,1989:181 - 190.
[2]弗里德曼. 抛物型偏微分方程[M]. 夏宗伟,译. 北京:科学出版社,1984.
[3]王术. Sobolev 空间与偏微分方程引论[M]. 北京:科学出版社,2009:210 - 214.
[4]EVANS L C. Partial differential equations:Graduate studies in mathematics[M]. Rhode Island:American Mathenatics Society,1998.
[5]伍卓群,尹景学,王春朋. 椭圆与抛物型方程引论[M]. 北京:科学出版社,2003:57 - 60.
[6]张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义:上册[M] . 北京:北京大学出版社,1987.