昆明学院学报　2019，41（3）：74～81　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

一类非线性抛物方程的整体解和爆破解

吴　洁，崔泽建*
（西华师范大学 数学与信息学院，四川 南充 637000）

摘要：在罗宾边界条件和狄利克雷边界条件下，探讨了一类非线性抛物型方程的整体解和爆破解．采用的方法主要是根据给出的适当假设，通过构造恰当的辅助函数，并利用最大值原理及微分不等式技巧等，从而得到了该方程整体存在的充分条件及爆破解，同时，还给出了整体存在性解决方案的上估计和当爆炸发生时爆炸时间的上界．

关键词：非线性抛物方程；极大值原理；爆破解；整体存在性
中图分类号：O175.26　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639（2019）03－0074－08
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2019.03.016

Global and Blow up Solutions for a Class of Nonlinear Parabolic Equations

WU Jie，CUI Zejian*
（College of Mathematic and Information，China West Normal University，Nanchong，Sichuan，China　637000）

Abstract：The global and blow up solutions for a class of nonlinear parabolic equations with Robin boundary condition and Dirichlet boundary condition are studied. The study method is mainly based on the appropriate assumptions given，by constructing exact auxiliary functions，using the maximum principle and differential inequality techniques to obtain the sufficient condition for global solution of this equation and blow up solution. Meanwhile，the upper estimate of the global solution and the upper bound for “blow up time” are also provided.

Key words：nonlinear parabolic equation；maximum principles；blow-up solutions；global solutions

1　预备知识

一类非线性抛物方程的整体解和爆破解是非线性偏微分方程研究的一个重要内容，主要是用于描述物理、化学、环境保护等许多领域的物质扩散和热传导．在这些工作中，针对各种非线性抛物问题，研究者[1-9]提出了许多不同的处理方法，如整体解的存在性、爆破解，以及爆炸时间的上界、爆炸速率和解的渐近行为．

近年来，在狄利克雷边界条件、诺伊曼边界条件、非线性诺伊曼边界或 Robin 边界条件下，许多研究者[1-9]探讨了它们的整体存在性和有限时间内的爆炸．而本文则主要讨论以下边界问题：

$$\begin{cases}(h(w))_t=\nabla\cdot(a(w)b(x)c(t)\nabla w)+g(x,q,t)f(w),\text{in }\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial w}{\partial n}=d(x,t)r(w),\text{on }\Gamma_1\times(0,T),\\ w=0,\text{on }\Gamma_2\times(0,T),\\ w(x,0)=w_0(x)>0,\text{in }\overline{\Omega}.\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期：2018－10－30
基金项目：四川省教育厅自然科学基金资助项目（09ZA119）．
作者简介：吴洁（1992—），女，四川自贡人，硕士研究生，主要从事应用数学研究．
*通讯作者：崔泽建（1963—），男，四川南充人，教授，主要从事应用数学研究，E-mail：cuizejian@126.com.

这里的 $\Omega\subset R^N(N\geqslant 2)$ 是一个带有光滑边界条件 $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\partial\Omega$ 的有界域；$\partial w/\partial n$ 是在 $\partial\Omega$ 上的外法向导数；T 是关于 w 的最大存在时间；$\overline{\Omega}$ 是 Ω 的闭区域. 令 $R^+=(0,+\infty)$. 在本研究中，假设 $a(s)$ 是一个在 $C^2(R^+)$ 上的正函数，$h(s)$ 是一个在 $C^3(R^+)$ 上的正函数，$h'(s)>0$ 对于任意的 $s\in R^+$ 都成立，$g(x,q,t)$ 是一个在 $C^1(\overline{\Omega}\times R^+\times R^+)$ 上的正函数，$f(s)$ 是一个在 $C^1(R^+)$ 上的非负函数，$d(x,t)$ 是一个在 $C^1(\partial\Omega\times R^+)$ 上的非负函数，$r(s)$ 是一个在 $C^1(R^+)$ 上的非负函数，$b(x)$ 是一个在 $C^1(\overline{\Omega})$ 上的正函数，$c(t)$ 是一个在 $C^1(\overline{\Omega})$ 上的正函数，$w_0(x)$ 是一个在 $C^2(\overline{\Omega})$ 上的正函数且满足条件的兼容性. 在经典抛物型方程理论[8] 和最大值原理[9] 的假设下，对于问题（1）这里存在一个经典解 $w(x,t)$. 在文献［10］正则性定理下，$w(x,t)\in C^3(\Omega\times(0,T)\cap C^2(\overline{\Omega}\times[0,T))$.

非线性抛物方程的整体存在和爆破解的问题描述了物理、生物学等中的许多物理现象. 因此，研究者[11-17] 对此进行了探讨，得到许多有意义的结果，并对问题（1）的一些特殊情况进行了研究. 而 Cao 等[18] 则讨论了以下诺伊曼边界问题：

$$\begin{cases}(b(w))_t=\nabla\cdot(h(t)k(x)a(w)\ \nabla w)+f(w),\text{in }\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial w}{\partial n}=g(x,w,t),\text{on }\partial\Omega\times(0,T),\\ w(x,0)=w_0(x)>0,\text{in }\overline{\Omega}.\end{cases}$$

这里的 $\Omega\subset R^N(N\geqslant 2)$ 一个带有光滑边界条件 $\partial\Omega$ 的有界域. 假设在本研究中，$a(s)$ 是一个在 $C^2(R^+)$ 上的正函数，$b(s)$ 是一个在 $C^3(R^+)$ 上的正函数，$b'(s)>0$ 对于任意的 $s\in R^+$. $f(s)$ 是一个在 $C^1(R^+)$ 上的非负函数，$g(x,s,t)$ 是一个在 $C^1(\partial\Omega\times R^+\times R^+)$ 上的非负函数，$h(t)$ 是一个在 $C^1(\overline{\Omega})$ 上的正函数，$k(x)$ 是一个在 $C^1(\overline{\Omega})$ 上的正函数，$w_0(x)$ 是一个在 $C^2(\overline{\Omega})$ 上的正函数且满足条件的兼容性. 在经典抛物型方程理论[8] 和最大值原理[9] 的假设下，这存在一种关于问题（1）的解 $w(x,t)$. 在文献［10］正则性定理下，$w(x,t)\in C^3(\Omega\times(0,T)\cap C^2(\overline{\Omega}\times[0,T))$. 而 Zhang 等[19] 则解决了以下 Robin 边界问题：

$$\begin{cases}(b(w))_t=\nabla\cdot(h(t)k(x)a(w)\ \nabla w)+f(x,w,q,t),\text{in }\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial w}{\partial n}+\gamma w=0,\text{on }\partial\Omega\times(0,T),\\ w(x,0)=w_0(x)>0,\text{in }\overline{\Omega}.\end{cases}$$

这里的 $q=|\nabla w|^2,\Omega\subset R^N(N\geqslant 2)$ 是一个带有光滑边界条件 $\partial\Omega$ 的有界域. 通过构造完全不同的辅助函数，在技术上使用最大值原理，得到了该问题的整体解和爆破解的存在性定理. 此外，还指定了整体解的上估计值、爆破时间的上界和爆破速率的上估计. 而 Zhang 等[20] 则研究了如下问题：

$$\begin{cases}w_t=\nabla\cdot(a(w)b(x)c(t)\ \nabla w)+f(x,w,q,t),\text{in }\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial w}{\partial n}=h(x,t)r(w),\text{on }\partial\Omega\times(0,T),\\ w(x,0)=w_0(x),\text{in }\overline{\Omega}.\end{cases}$$

这里的 $q=|\nabla w|^2,\Omega\subset R^N(N\geqslant 2)$ 是一个带有边界条件 $\partial\Omega$ 的有界域. 通过构造完全不同的辅助函数，利用 Hopf′s 最大值原理，给出了爆破和整体解的充分条件. 此外，还提出了爆破时间的上界和整体存在性的上估计. 在本文中，考虑到问题（1）在 Robin 边界条件和狄利克雷边界条件下的爆破解和整体存在性[21-23]，作为边界通量函数 $d(x,t)\gamma(w)$ 还要取决于浓度变量 w、空间变量 x 和时间变量 t. 由于在一般的非线性边界条件下，对爆破现象的研究很少. 因此，本文利用最大值原理和微分不等式技巧，得到了方程整体解和爆破解的存在定理，并获得了爆破速率、爆破时间的上界和整体解的估计值，同时讨论了问题（1）的整体解及爆破解.

2　整体解

在本节中，希望得到问题（1）的 4 种非线性机制在（1）的整体解中的相互作用. 下面的定理是本

文的主要结果.

定理 1 设 $w(x,t)$ 是问题（1）的一个解. 假设如下：

(H1) 对任意的 $s,t\in R^{+}$,

$$a'(s)\geqslant 0,c'(t)\geqslant 0,\frac{h'}{a}\geqslant 0,d_t\leqslant 0,a'r+ar_w\leqslant 0,q=|\nabla w|^2. \tag{2}$$

(H2) 对任意的 $(x,s,t)\in\partial\Omega\times R^{+}\times R^{+}$,

$$a'bc-abc-2g_q f\geqslant 0,\frac{g(f-f')}{h'}-\frac{c'}{c}\geqslant 0,g_t\leqslant 0. \tag{3}$$

(H3) 常数,

$$\alpha=\max_{\bar{\Omega}}\left\{\frac{a(w_0)[\nabla\cdot(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0)+g(x,q_0,0)f(w_0)]}{e^{w_0}h'(w_0)}\right\}>0. \tag{4}$$

(H4)
$$\int_{m_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s=+\infty,m_0=\min_{\bar{\Omega}}w_0(x). \tag{5}$$

$w(x,t)$ 是一个整体解，并且

$$w(x,t)\leqslant H^{-1}(\alpha t+H(w_0(x))), \tag{6}$$

这里
$$H(z)=\int_{m_0}^{z}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s,z\geqslant m_0, \tag{7}$$

并且 H^{-1} 是 H 的逆函数.

证明 考虑如下辅助函数：

$$P(x,t)=a(w)w_t-\alpha e^{w}, \tag{8}$$

从以上可得到

$$\nabla P=a'w_t\nabla w+a\nabla w_t-\alpha e^{w}\nabla w, \tag{9}$$

$$\nabla P=\nabla\cdot\nabla P=a''w_t|\nabla w|^2+2a'(\nabla w\cdot\nabla w_t)+a'w_t\Delta w+a\Delta w_t-\alpha e^{w}|\nabla \mathrm{w}|^2-\alpha e^{w}\Delta w, \tag{10}$$

由（1）式得,

$$\begin{aligned}(h(w))_t&=h'w_t=\nabla\cdot(a(w)b(x)c(t)\nabla w)+g(x,q,t)f(w)=a(w)b(x)c(t)\Delta w+a'(w)b(x)c(t)|\nabla w|^2\\&+a(w)c(t)(\nabla b\cdot\nabla w)+g(x,q,t)f(w),\end{aligned} \tag{11}$$

同时,
$$w_t=\frac{abc}{h'}\Delta w+\frac{a'bc}{h'}|\nabla w|^2+\frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w)+\frac{gf}{h'}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}(w_t)_t&=bc(\frac{a''}{h'}-\frac{a'h''}{(h')^2})w_t|\nabla w|^2+\frac{2a'bc}{h'}(\nabla w\cdot\nabla w_t)+c(\frac{a''}{h'}-\frac{a'h''}{(h')^2})\cdot w_t(\nabla b\cdot\nabla w)\\&+\frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w_t)+bc(\frac{a'}{h'}-\frac{ah''}{(h')^2})w_t\Delta w+\frac{abc}{h'}\Delta w_t+\frac{a'bc'}{h'}|\nabla w|^2+\frac{ac'}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w)\\&+\frac{abc'}{h'}\Delta w+\frac{g_t f}{h'}+\frac{gf'}{h'}w_t+\frac{2g_q f(\nabla w\cdot\nabla w_t)}{h'}-\frac{gfh''w_t}{(h')^2},\end{aligned} \tag{13}$$

于是得到,
$$\begin{aligned}P_t&=a'(w_t)^2+a(w_t)_t-\alpha e^{w}w_t=a'(w_t)^2+bc(\frac{aa''}{h'}-\frac{aa'h''}{h'})w_t|\nabla w|^2+\frac{2aa'bc}{h'}(\nabla w\cdot\nabla w_t)\\&+c(\frac{aa'}{h'}-\frac{a^2h''}{(h')^2})\cdot w_t(\nabla b\cdot\nabla w)+\frac{a^2c}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w_t)+bc(\frac{aa'}{h'}-\frac{a^2h''}{h'^2})w_t\Delta w+\frac{a^2bc}{h'}\Delta w_t\\&+\frac{aa'bc'}{h'}|\nabla w|^2+\frac{a^2c'}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w)+\frac{a^2bc'}{h'}\Delta w+\frac{ag_t f}{h'}+\frac{agf'}{h'}w_t+\frac{2ag_q f(\nabla w\cdot\nabla w_t)}{h'}\\&-\frac{agfh''w_t}{(h')^2}-\alpha e^{w}w_t,\end{aligned} \tag{14}$$

由（10）式到（14）式可得

$$\frac{abc}{h'}\Delta P-P_t=\frac{abc}{h'}((a''w_t|\nabla w|^2)+2a'(\nabla w\cdot\nabla w_t)+a'w_t\Delta w+a\Delta w_t-\alpha e^{w}|\nabla w|^2-\alpha e^{w}\Delta w)-P_t$$

$$= \frac{aa'bch''}{(h')^2}qw_t - (\frac{abc\alpha e^w}{h'} + \frac{aa'bc}{h'})q + \frac{a^2bch''}{(h')^2}w_t\Delta w - (\frac{abc}{h'}\alpha e^w + \frac{a^2bc'}{h'})\cdot\Delta w - a'(w_t)^2$$
$$+ (\frac{a^2ch''}{(h')^2} - \frac{aa'c}{h'})w_t(\nabla b\cdot\nabla w) - \frac{a^2c}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w_t) - \frac{a^2c'}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w) - \frac{2g_qfa}{h'}(\nabla w\cdot\nabla w_t)$$
$$+ (\frac{agfh''}{(h')^2} - \frac{agf'}{h'} + \alpha e^w)w_t - \frac{ag_tf}{h'}. \tag{15}$$

由（11）式有
$$\Delta w = \frac{h'}{abc}w_t - \frac{a'}{a}q - \frac{1}{b}(\nabla b\cdot\nabla w) - \frac{gf}{abc}. \tag{16}$$

将（16）式代入（15）式，得
$$\frac{abc}{h'}\Delta P - P_t = (\frac{ah''}{h'} - a')(w_t)^2 - \frac{aa'c}{h'}w_t(\nabla b\cdot\nabla w) - (\frac{agf'}{h'} + \frac{ac'}{c})w_t + \alpha e^w(\frac{a'bc}{h'} - \frac{abc}{h'})q$$
$$+ \frac{ac}{h'}\alpha e^w(\nabla b\cdot\nabla w) - \frac{a^2c}{h'}(\nabla b\cdot\nabla w_t) - \frac{2g_qf}{h'}\nabla w\cdot\nabla w_t - \frac{agf'}{h'}w_t - \frac{ag_tf}{h'} + \frac{gf}{h'}\alpha e^w + \frac{ac'}{h'c}gf. \tag{17}$$

由（9）式得
$$\nabla w_t = \frac{1}{a}\nabla P - \frac{a'}{a}w_t\nabla w + \alpha\frac{e^w}{a}\nabla w. \tag{18}$$

将（18）式代入（17）式，得
$$\frac{abc}{h'}\Delta P - P_t = (\frac{ah''}{h'} - a')(w_t)^2 - (\frac{agf'}{h'} + \frac{ac'}{c})w_t + (\frac{a'bc}{h'} - \frac{abc}{h'} - \frac{2g_qf}{ah'})\alpha e^wq - \frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla P)$$
$$- \frac{2g_qf}{ah'}(\nabla w\cdot\nabla P) + \frac{2a'g_qf}{h'}qw_t + \frac{gf}{h'}\alpha e^w + \frac{ac'}{h'c}gf - \frac{ag_tf}{h'}. \tag{19}$$

通过（8）式，可得
$$w_t = \frac{1}{a}P + \alpha\frac{e^w}{a}. \tag{20}$$

因此，可得
$$\frac{abc}{h'}\Delta P + \frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla P) - P_t = (\frac{ah''}{h'} - a')(w_t)^2 + (\frac{a'bc}{h'} - \frac{abc}{h'} - \frac{2g_qf}{ah'})\alpha e^wq - \frac{2g_qf}{ah'}(\nabla w\cdot\nabla P) + \frac{gf}{h'}\alpha e^w$$
$$- \frac{c'}{c}\alpha e^w - \frac{gf'}{h'}\alpha e^w - \frac{ag_tf}{h'} - (\frac{gf'}{h'} + \frac{c'}{c})P + \frac{2a'g_qf}{ah'}qP + \frac{ac'}{h'c}gf + \frac{2a'g_qf}{ah'}\alpha e^w, \tag{21}$$

同时，有
$$\frac{abc}{h'}\Delta P + \frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla P) + (\frac{gf'}{h'} + \frac{c'}{c} - \frac{2a'g_qf}{a^2h'}q)P + \frac{2g_qf}{ah'}(\nabla w\cdot\nabla P) - P_t = \frac{a^2}{h'}(\frac{h'}{a})(w_t)^2$$
$$+ (a'bc - abc - 2g_qf)\cdot\frac{\alpha e^w}{h'}q + \alpha e^w(\frac{g(f-f')}{h'} - \frac{c'}{c}) + \frac{2a'g_qf}{ah'}\alpha e^w + \frac{ac'}{h'c}gf - \frac{ag_tf}{h'}. \tag{22}$$

由假设（2）和（3）可以表明（22）的右边是非负的，即
$$\frac{abc}{h'}\Delta P + \frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla P) + (\frac{gf'}{h'} + \frac{c'}{c} - \frac{2a'g_qf}{a^2h'}q)P + \frac{2g_qf}{ah'}(\nabla w\cdot\nabla P) - P_t \geqslant 0 \text{ 在 } \Omega\times(0,T). \tag{23}$$

从（1）式到（8）式，在 $\Gamma_1\times(0,T)$ 上，可得
$$\frac{\partial P}{\partial n} = a'w_t\frac{\partial w}{\partial n} + a\frac{\partial w_t}{\partial n} - \alpha e^w\frac{\partial w}{\partial n} = a'w_tdr + a(dr)_t - \alpha e^wdr = (a'dr + adr_w)w_t + ard_t - \alpha e^wdr$$
$$= (a'dr + adr_w)(\frac{1}{a}P + \alpha\frac{e^w}{a}) + ard_t - \alpha e^wdr = \frac{a'r + ar_w}{a}dP + \alpha e^wd\frac{a'r + ar_w - ar}{a} + ard_t, \tag{24}$$

现在，由（4）式可得
$$\max_{\Omega}P(x,0) = \max_{\Omega}\{a(w_0)(w_0)_t - \alpha e^{w_0}\}$$
$$= \max_{\Omega}\left\{\frac{a(w_0)[\nabla\cdot(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0) + g(x,q_0,t)f(w_0)]}{h'(w_0)} - \alpha e^{w_0}\right\}$$
$$= \max_{\Omega}\left\{e^{w_0}(\frac{a(w_0)[\nabla\cdot(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0) + g(x,q_0,t)f(w_0)]}{e^{w_0}h'(w_0)} - \alpha)\right\} = 0. \tag{25}$$

在 $\Gamma_2\times(0,T)$ 上，$w=0$，则

$$\frac{\partial P}{\partial n}=a'w_t\frac{\partial w}{\partial n}+a\frac{\partial w_t}{\partial n}-\alpha e^w\frac{\partial w}{\partial n}=0. \tag{26}$$

结合（23）式到（26）式，以及应用最大值原理，可以得到 P 在 $\overline{\Omega}\times[0,T)$ 上的最大值是零．事实上，可以假设 P 在某一点上可以取得最大值，$(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$，并且

$$P(x_0,t_0)>0,\frac{\partial P}{\partial n}\Big|_{(x_0,t_0)}>0. \tag{27}$$

接下来，利用假设（2）式、（3）式和 $P(x_0,t_0)>0$，由（24）式可得

$$\frac{\partial P}{\partial n}\Big|_{(x_0,t_0)}\leqslant 0, \tag{28}$$

因此，在 $\overline{\Omega}\times[0,T)$ 上，$P\leqslant 0$.

由（8）式到（28）式，有

$$\frac{a(w)}{e^w}w_t\mathrm{d}t\leqslant\alpha. \tag{29}$$

对于每一个固定的 $x\in\overline{\Omega}$，将（29）式在［0，t］上积分：

$$\int_0^t\frac{a(w)}{e^w}w_t\mathrm{d}t=\int_{w_0(x)}^{w(x,t)}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s\leqslant\alpha t, \tag{30}$$

这与条件（5）式一起表明 w 一定是问题（1）的整体解．实际上，如果 w 在有限时刻 T 爆破，然后

$$\lim_{t\to T^-}w(x,t)=+\infty. \tag{31}$$

此外，在（30）式中让 $t\to T^-$，可得

$$\int_{w_0(x)}^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s\leqslant\alpha T,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s=\int_{m_0}^{w_0(x)}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s+\int_{w_0(x)}^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s\leqslant\int_{m_0}^{w_0(x)}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s+\alpha t<+\infty. \tag{32}$$

这与条件（5）式相矛盾，也就表明 w 一定是一个整体解．除此之外，由（30）式有

$$H(w(x,t))-H(w_0(x))=\int_{m_0}^{w(x,t)}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s-\int_{m_0}^{w_0(x,t)}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s=\int_{m_0(x)}^{w(x,t)}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s=\int_0^t\frac{a(w)}{e^w}w_t\mathrm{d}t\leqslant\alpha t.$$

因为 H 是一个严格递增的函数，由此可得

$$w(x,t)\leqslant H^{-1}(\alpha t+H(w_0(x))).$$

到此为止，已完成定理 1 的证明.

3 爆破解

以下是爆破解的相关定理及证明.

定理 2 $w(x,t)$ 是问题（1）的一个解．假设如下：

（I）对任意的 $s,t\in R^+$，

$$a'(s)\leqslant 0,c'(t)\leqslant 0,\frac{h'}{a}\leqslant 0,d_t\geqslant 0,a'r+ar_w\geqslant 0,q=|\nabla w|^2. \tag{33}$$

（II）对任意的 $(x,s,t)\in\partial\Omega\times R^+\times R^+$，

$$a'bc-abc-2g_qf\leqslant 0,\frac{g(f-f')}{h'}-\frac{c'}{c}\leqslant 0,g_t\geqslant 0. \tag{34}$$

（III）对常数，

$$\beta=\min_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{a(w_0)[\nabla\cdot(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0)+g(x,q_0,0)f(w_0)]}{e^{w_0}h'(w_0)}\right\}>0. \tag{35}$$

（IV）

$$\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s<+\infty,M_0=\max_{\overline{\Omega}}w_0(x). \tag{36}$$

然后，$w(x,t)$在有限时间 T 时刻爆破，并且

$$T \leqslant \frac{1}{\beta}\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s, \tag{37}$$

$$w(x,t) \leqslant G^{-1}(\beta(T-t)), \tag{38}$$

这里

$$G(z) = \int_z^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s, z > 0, \tag{39}$$

其中 G^{-1}是 G 的逆函数.

证明　考虑以下辅助函数：

$$Q(x,t) = a(w)w_t - \beta e^w. \tag{40}$$

因此，可得

$$\nabla Q = a'w_t\nabla w + a\nabla w_t - \beta e^w\nabla w, \tag{41}$$

$$\Delta Q = \nabla\cdot\nabla Q = a''w_t|\nabla w|^2 + 2a'(\nabla w\cdot\nabla w_t) + a'w_t\Delta w + a\Delta w_t - \beta e^w|\nabla w|^2 - \beta e^w\Delta w. \tag{42}$$

使用与上述相同的推理过程，从（9）式到（22）式，有

$$\frac{abc}{h'}\Delta Q + \frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla Q) + \left(\frac{gf'}{h'} + \frac{c'}{c} - \frac{2a'g_qf}{a^2h'}q\right)Q + \frac{2g_qf}{ah'}(\nabla w\cdot\nabla Q) - Q_t = \frac{a^2}{h'}\left(\frac{h'}{a}\right)(w_t)^2$$
$$+ (a'bc - abc - 2g_qf)\cdot\frac{\beta e^w}{h'}q + \beta e^w\left(\frac{g(f-f')}{h'} - \frac{c'}{c}\right) + \frac{2a'g_qf}{a^2h'}\beta e^w + \frac{ac'}{h'c}gf - \frac{ag_tf}{h'}. \tag{43}$$

由假设条件（33）式和（34）式可以看出，（43）式的右部分是非正的，也就是说在 $\Omega\times(0,T)$上，

$$\frac{abc}{h'}\Delta Q + \frac{ac}{h'}(\nabla b\cdot\nabla Q) + \left(\frac{gf'}{h'} + \frac{c'}{c} - \frac{2a'g_qf}{a^2h'}q\right)Q + \frac{2g_qf}{ah'}(\nabla w\cdot\nabla Q) - Q_t \leqslant 0. \tag{44}$$

与（24）相同，可以得到

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = \frac{a'r + ar_w}{a}dQ + \alpha e^w d\,\frac{a'r + ar_w - ar}{a} + ard_t, \text{on } \Gamma_1\times(0,T). \tag{45}$$

然后，由（35）式可知

$$\begin{aligned}\min_{\overline{\Omega}}Q(x,0) &= \min_{\overline{\Omega}}\{a(w_0)(w_0)_t - \beta e^{w_0}\}\\ &= \min_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{a(w_0)[\nabla\cdot(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0) + g(x,q_0,t)f(w_0)]}{h'(w_0)} - \beta e^{w_0}\right\}\\ &= \min_{\overline{\Omega}}\left\{e^{w_0}\left(\frac{a(w_0)[\nabla\cdot(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0) + g(x,q_0,t)f(w_0)]}{e^{w_0}h'(w_0)} - \beta\right)\right\} = 0.\end{aligned} \tag{46}$$

在 $\Gamma_2\times(0,T)$上，$w=0$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = a'w_t\frac{\partial w}{\partial n} + a\frac{\partial w_t}{\partial n} - \alpha e^w\frac{\partial w}{\partial n} = 0, \tag{47}$$

结合（44）式到（47）式和条件（34）式，且运用最大值原理[9]，可以得到关于 Q 在 $\overline{\Omega}\times[0,T)$的最小值是零. 因此，可知

$$Q \geqslant 0 \text{ 在}\overline{\Omega}\times[0,T),$$

也就是

$$\frac{a(w)}{e^w}w_t\mathrm{d}t \geqslant \beta. \tag{48}$$

在一个固定的点 $x_0\in\overline{\Omega}, w_0(x_0) = M_0$，将（48）式在$[0,t]$上积分，

$$\int_0^t\frac{a(w)}{e^w}w_t\mathrm{d}t = \int_{M_0}^{w(x_0,t)}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s \geqslant \beta t. \tag{49}$$

这与假设条件（Ⅳ）一起说明 w 在有限时间 $t=T$ 时刻爆破. 此外，在（49）式中让 $t\to T$，可得

$$T \leqslant \frac{1}{\beta}\int_{M_0}^{+\infty}\frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s. \tag{50}$$

对于每一个固定的点 $x\in\overline{\Omega}$，在$[t,s](0<t<s<T)$上整合不等式（48）式，得

$$G(w(x,t)) \geqslant G(w(x,t)) - G(w(x,s)) = \int_{w(x,t)}^{+\infty} \frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s - \int_{w(x,s)}^{+\infty} \frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s = \int_{w(x,t)}^{w(x,s)} \frac{a(s)}{e^s}\mathrm{d}s = \int_t^s \frac{a(w)}{e^w} w_t \mathrm{d}t$$
$$\geqslant \beta(s-t).$$

因此，让 $s \to T$，可得 $G(w(x,t)) \geqslant \beta(T-t)$.

因为 G 是一个严格递减的函数，可得 $w(x,t) \leqslant G^{-1}(\beta(T-t))$.

到此为止，完成定理 2 的证明.

4 应用

例 1 w 是以下问题的解：

$$\begin{cases} (h(w))_t = \nabla(e^{w+t}(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)\nabla w) + e^{-t}(24+q\sum_{i=1}^{3} x_i^2)w^2 e^w, \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = e^{-w}e^{-t}\sum_{i=1}^{3} x_i^4, \text{on } \Gamma_1 \times (0,T), \\ w = 0, \text{on } \Gamma_2 \times (0,T), \\ w(x,0) = w_0(x) = (1-\sum_{i=1}^{3} x_i^2)^2, \text{in } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

这里 $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ 是关于 R^3 的一个单位球. 因此，现在有 $h(w) = we^w$，$a(w) = e^w$，$b(x) = 1 + \sum_{i=1}^{3} x_i^2$，$c(t) = e^t$，$g(x,q,t) = e^{-t}(24 + q\sum_{i=1}^{3} x_i^2)$，$f(w) = w^2 e^w$，$d(x,t) = e^{-t}\sum_{i=1}^{3} x_i^4$，$r(w) = e^{-w}$.

假设
$$s = |x|^2,$$
很容易发现条件（I ~ IV）是成立的. 此外，

$$\begin{aligned} &\nabla(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0) \\ &= \nabla(e^{w_0}(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)\nabla w_0) \\ &= e^{w_0}\nabla w_0 \cdot \nabla w_0(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2) + e^{w_0}\nabla(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)\cdot \nabla w_0 + e^{w_0}(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)\Delta w_0 \\ &= e^{w_0}[q_0(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2) + \nabla(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)\cdot \nabla w_0 + (1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)\nabla w_0] \\ &= e^{w_0}[16\sum_{i=1}^{3} x_i^2(1-\sum_{i=1}^{3} x_i^2)^2(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2) - 8\sum_{i=1}^{3} x_i^2(1-\sum_{i=1}^{3} x_i^2)] \\ &+ e^{w_0}[8\sum_{i=1}^{3} x_i^2(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2) - 12(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)(1-\sum_{i=1}^{3} x_i^2)], \end{aligned} \tag{51}$$

由（51），可得

$$\begin{aligned} \alpha &= \max_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{a(w_0)[\nabla\cdot(a(w_0)b(x)c(0)\nabla w_0) + g(x,q_0,0)f(w_0)]}{e^{w_0}h'(w_0)}\right\} \\ &= \max_{\overline{\Omega}}\left\{\frac{a(w_0)[\nabla(e^{w_0}(1+\sum_{i=1}^{3} x_i^2)\nabla w_0) + (24+q_0\sum_{i=1}^{3} x_i^2)e^{w_0}w_0^2]}{e^{w_0}(e^{w_0}+w_0e^{w_0})}\right\} \\ &= \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\{4e^{(1-s)^2}[4s^8 - 24s^7 + 60s^6 - 80s^5 + 70s^4 - 52s^3 + 43s^2 - 20s + 3]\} = 3.1302, \end{aligned}$$

根据定理 1 可知 w 一定是一个整体解，并且

$$w(x,t) \leqslant H^{-1}(\alpha t + H(w_0(x))) = 3.1302t + |x|^2 + 1.$$

5 小结

本文主要采用构造辅助函数，以及技术性地利用微分不等式技巧和最大值原理，得到了一类非线性抛物型方程的整体解和爆破解的存在定理. 同时，还获得了爆破速率、爆破时间的上界估计及整体解的上估计值.

[参考文献]

[1] GALAKTIONOV V A, VAZQUEZ J L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2002, 8 (2): 399 – 4345.

[2] QI Y W, WANG M X, WANG Z J. Existence and non-existence of global solutions of diffusion systems with nonlinear boundary conditions [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 2004, 134 (6): 1199 – 1217.

[3] DING J T. Blow-up of solutions for a class of semilinear reaction diffusion equations with mixed boundary conditions [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15 (2): 159 – 162.

[4] ZHANG L L. Blow-up of solutions for a class of nonlinear parabolic equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 25 (4): 479 – 486.

[5] DING J T, GUO B Z. Blow-up and global existence for nonlinear parabolic equations with Neumann boundary conditions [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60 (3): 670 – 679.

[6] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Blow-up in parabolic problems under Robin boundary conditions [J]. Applicable Analysis, 2008, 87 (6): 699 – 707.

[7] ENACHE C. Blow-up phenomena for a class of quasilinear parabolic problems under Robin boundary condition [J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24 (3): 288 – 292.

[8] AMANN H. Quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1986, 92 (2): 153 – 192.

[9] SPERB R P. Maximum principles and their applications [M]. New York: Academic Press, 1981.

[10] DING J T, LI S J. Blow-up solutions and global solutions for a class of quasilinear parabolic equations with Robin boundary conditions [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2005, 49 (5): 689 – 701.

[11] ZHANG H L. Blow-up solutions and global solutions for non-linear parabolic problems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69 (12): 4567 – 4574.

[12] DING J T, GUO B Z. Global and blow-up solutions for nonlinear parabolic equations with a gradient term [J]. Houston J Math, 2011, 37 (4): 1265 – 1277.

[13] LI F S, LI J L. Global existence and blow-up phenomena for nonlinear divergence form parabolic equations with inhomogeneous Neumann boundary conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 385 (2): 1005 – 1014.

[14] HARADA J, MIHARA K. Blow-up rate for radially symmetric solutions of some parabolic equations with nonlinear boundary conditions [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 253 (5): 1647 – 1663.

[15] DING J T. Global and blow-up solutions for nonlinear parabolic equations with Robin boundary conditions [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2013, 65 (11): 1808 – 1822.

[16] LIU Y. Lower bounds for the blow-up time in a non-local reaction diffusion problem under nonlinear boundary conditions [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2103, 57 (3): 926 – 931.

[17] CHEN H, LUO P, LIU G W. Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 422 (1): 84 – 98.

[18] CAO J G, ZHANG L L. Global and Blow-up solutions for a class of nonlinear parabolic equations [C]. 28th Chinese Control and Decision Conference, 2016.

[19] ZHANG L L, WANG H. Global and blow-up solutions for a class of nonlinear parabolic problems under Robin boundary condition [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014 (3): 1 – 9.

[20] ZHANG T, HE Y N. Blow-up and global solutions for a class of nonlinear parabolic equations with different kinds of boundary conditions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217 (2): 801 – 810.