昆明学院学报 2010, 32(3):16 ~ 17 CN 53 - 1211/G4 ISSN 1674 - 5639
Journal of Kunming University

Kirchhoff 型问题的变号解和多重解

张绍康,熊绍武
(昭通师范高等专科学校 数学系,云南 昭通 657000)

摘要:使用变分方法中的下降流的不变集技巧研究了一类 Kirchhoff 型问题的变号解和多重解,所得的结果改进了文后参考文献[1]中的定理 1.2.

关键词: Kirchhoff 型问题;变号解;多重解;临界点
中图分类号:O175.8 **文献标识码:**A **文章编号:**1674 - 5639(2010)03 - 0016 - 02

Sign-Changing and Multiple Solutions for Kirchhoff Type Problems

ZHANG Shao-kang, XIONG Shao-wu
(Department of Mathematics, Zhaotong Teachers College, Yunnan Zhaotong 657000, China)

Abstract: By applying the existence of sign-changing and multiple solutions for Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow, a new result of sign-changing and multiple solutions is obtained, which improves corresponding result of [1] Theorem 1.2.

Key words: Kirchhoff type problems; sign-changing solutions; multiple solutions; critical point

1 预备知识

考虑 Kirchhoff 型问题

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)\Delta u = f(x,u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a,b>0$, Ω 是 R^N 中的光滑有界区域, f 是满足次临界增长条件

$$|f(x,t)|\leqslant C(1+|t|^{p-1}), \tag{2}$$

的 Caratheodory 函数($2<p<2^*$, $2^*=\begin{cases}(n-2)^{-1}2n, n\geqslant 3 \\ +\infty, n=1,2\end{cases}$).

方程(1)有着深厚的生物学背景,它可用于描述生物的种群密度等平均量[2]. 另外,此问题与 Kirchhoff 静态模拟方程 $u_{tt}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)\Delta u=g(x,t)$ 密切相关,它是经典 D'Alembert 波方程的延伸,用于描述在长度改变的情况下弹性弦的横向振动. 关于 Kirchhoff 方程的研究结果[3-7]可参见文献[3 ~ 7]. 最近,许多作者将变分法用于方程(1)的研究,并得到一些有意义的结论,特别是 Mao 和 Zhang 在假设 $tf(x,t)\geqslant 0$ 下得到下面的定理:

定理 1 对 $\forall (x,t)\in\Omega\times R^1$, 定义 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$. 若 f 满足下列条件:

(1) 当 $|t|\to\infty$ 时, $\dfrac{F(x,t)}{t^4}\to+\infty$ 对 $x\in\Omega$ 一致成立;

(2) 当 $|t|\to 0$ 时, $f(x,t)=0(|t|)$ 对 $x\in\Omega$ 一致成立;

(3) 当 $|t|\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{4}f(x,t)t-F(x,t)\to+\infty$ 对 $x\in\Omega$ 一致成立并且存在 $\sigma>\max\{1,\dfrac{N}{2}\}$, 使当 $|t|$ 充分大时有 $|f(x,t)|^{\sigma}\leqslant C\left[\dfrac{1}{4}f(x,t)t-F(x,t)\right]|t|^{\sigma}$;

(4) 对一致的 $x\in\Omega$, $f(x,t)$ 是 t 的局部 Lipschitz 连续函数.

则方程(1)至少有 1 个正解、1 个负解和 1 个变号解.

受到文献[8]的启发,本文将使用下降流的不变集技巧改进上述定理的结论.

令 $X=H_0^1(\Omega)$, 众所周知, X 关于内积 $(u,v)=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x$ 构成一个 Hilbert 空间. 并且,由 Sobolev 嵌

收稿日期:2010 - 03 - 25
基金项目:昭通师范高等专科学校科学基金资助项目(XJKZ0910)
作者简介:张绍康(1959—),男,云南省昭通人,副教授,主要从事数学教育与非线性分析研究.

入定理,当 $r \in [1,2^*]$ 时,X 连续嵌入 $L^r(\Omega)$;而当 $r \in [1,2^*)$ 时,X 紧嵌入 $L^r(\Omega)$. 特别是,存在 γ_r 使得 $|u|_r \leqslant \gamma_r \|u\|$,其中 $|u|_r$,$\|u\|$ 分别表示 L^r 范数和 X 中的通常范数.

定义 X 中的泛函 $\Phi(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \Psi(u)$,其中 $\Psi(u) = \int_\Omega f(x,u)\mathrm{d}x$. 称 $u \in X$ 是方程(1)的弱解,如果对 $\forall v \in X$ 都有 $(a + b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u)\mathrm{d}x$. 显然,若 $u \in X$ 是泛函 Φ 的临界点,则它是方程(1)的弱解. 因为 f 是次临界增长的,所以 Φ 连续可微且对 $\forall u,v \in X$ 都有 $\langle \Phi'(u), v\rangle = (a + b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x$.

2　主要结果

为了方便叙述本文所得到的主要结果,我们先给出 2 个基本假设:

(a) $\limsup\limits_{|t|\to 0} \frac{f(x,t)}{at} < \lambda_1$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立,其中 $\lambda_1 = \inf\{\|u\|^2 : u \in X, |u|_2 = 1\}$;

(b) $\liminf\limits_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)t - 4F(x,t)}{|t|^\tau} > -\alpha$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立,其中 $\tau \in [0,2]$ 且 $0 < \alpha < a\lambda_1$.

定理 2　若 $tf(x,t) \geqslant 0$,且条件(1),(4),(a) 和(b) 成立,则方程(1) 至少有 1 个正解、1 个负解和 1 个变号解.

实际上,条件(3) 是超 4 次条件的一种弱化形式. 显然,如果条件(3) 成立,那么 $\liminf\limits_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)t - 4F(x,t)}{|t|^\tau} \geqslant 0 \geqslant -\alpha$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立. 即条件(3) 蕴含条件(b). 另外,条件(a) 比条件(2) 弱得多,所以定理 2 是定理 1 的一个改进结果.

在证明定理 2 之前,我们先给出 2 个引理.

引理 1　Φ 的有界(PS) 序列有收敛的子列.

证明:引理的结论由 f 的次临界增长条件和 Sobolev 紧嵌入定理直接可得.

引理 2　若条件(b) 成立,则 Φ 满足(PS) 条件.

证明:若 $\{u_n\}$ 是 X 中的(PS) 序列,则可设 $\Phi(u_n) \to c$ 且 $\Phi'(u_n) \to 0$. 由引理 1,只需证明 $\{u_n\}$ 在 X 中有界即可. 事实上,如果条件(b) 成立,那么 $\exists \delta > 1$ 使当 $|t| > \delta$ 时,$f(x,t)t - 4F(x,t) \geqslant -\alpha|t|^\tau$.

令 $\Omega_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| > \delta\}$,$P(x,u_n) = f(x,u_n)u_n - 4F(x,u_n)$. 则对充分大的 n,$\exists A > 0$ 使得

$$\begin{aligned} 4(c+1) + \|u_n\| &\geqslant 4\Phi(u_n) - \langle \Phi'(u_n), u_n\rangle = a\|u_n\|^2 + \int_\Omega P(x,u_n)\mathrm{d}x \\ &= a\|u_n\|^2 + \int_{\Omega_n} P(x,u_n)\mathrm{d}x + \int_{\Omega\setminus\Omega_n} P(x,u_n)\mathrm{d}x \\ &\geqslant a\|u_n\|^2 - \alpha\int_{\Omega_n}|u_n(x)|^\tau \mathrm{d}x - A \\ &\geqslant \left(a - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\|u_n\|^2 - A. \end{aligned}$$

此不等式表明 $\{u_n\}$ 在 X 中有界.

定理 2 的证明:由(2) 和条件(a) 可知,对充分小的 $\varepsilon > 0$,$\exists B > 0$ 使得

$$F(x,t) < \frac{a}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)t^2 + B|t|^p.$$

因此,

$$\Phi(u) \geqslant \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{a}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x - B\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - B\gamma_p^p\|u\|^p.$$

因为 $p > 2$,所以可选取 $\delta > 0$ 使当 $u \in \overline{B}_\delta$ 时,$\Phi(u) \geqslant \frac{a}{4}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1}\right)u^2$,即 0 是 Φ 的局部极小值,且 $\Phi(\partial B_\delta) \geqslant \frac{a}{4}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1}\right)\delta^2$.

设 λ'_1,λ_2 分别为负 Laplace 的第一、第二特征值,V_1,V_2 是相应于 λ'_1,λ_2 的特征子空间. 显然,$\lambda'_1 = \lambda_1$. 令 $Y = V_1 \oplus V_2$,则 Y 是 X 的有限维子空间,因此,对 $\forall u \in Y$,$\exists \theta > 0$ 使得 $|u|_4 \geqslant \theta\|u\|$. 选取大于 1 的自然数 m 满足 $m\theta^4 > \frac{b}{4}$. 由(1) 和次临界增长条件知 $\exists C_m > 0$ 使得 $F(x,t) \geqslant mt^4 - C_m$. 从而,当 $u \in Y$ 时有:

(下转第 37 页)