昆明学院学报 2012，34(6)：1～4 CN 53－1211/G4 ISSN 1674－5639
Journal of Kunming University

两个新的矩阵特征值包含区域

赵瑞娟，李耀堂*
（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明 650091）

摘要：引入广义 α－对角占优矩阵和广义双 α－对角占优矩阵概念，给出判定它们的充分必要条件，并由此获得了矩阵特征值的两个新包含区域，证明新的特征值包含区域包含于最近几个文献所给的特征值包含区域，因而能更精确地确定矩阵特征值的位置.

关键词：矩阵特征值；包含区域；广义 α－对角占优矩阵；广义双 α－对角占优矩阵
中图分类号：O151.21 **文献标识码：**A **文章编号：**1674－5639(2012)06－0001－04

Two New Eigenvalue Inclusion Regions for Matrices

ZHAO Rui-juan，LI Yao-tang*
（College of Mathematics and Statistics，Yunnan University，Yunnan Kunming 650091，China）

Abstract: The definitions of generalized α－diagonally dominant matrices and generalized doubly α－diagonally dominant matrices are presented，and sufficient and necessary conditions for judging them are obtained. By using the conditions，two new eigenvalue inclusion regions are given，and proved to be tighter than the corresponding eigenvalue inclusion regions in several recently papers，therefore，they can be used to determine the location of eigenvalue more accurately.

Key words: matrix eigenvalue；inclusion region；α－diagonally dominant matrices；generalized doubly α－diagonally dominant matrices

1 预备知识

矩阵特征值问题是数值线性代数的基本问题之一，也是该领域近 30 a 来被广泛关注的课题，国内外学者对其进行了大量研究[1-5]. 本文是该研究的继续，我们首先引入广义 α－对角占优矩阵和广义双 α－对角占优矩阵概念，给出判定它们的充分必要条件，并由此获得了矩阵特征值的两个新包含区域，改进了文献[3]和文献[4]中的相关结果.

为了叙述方便，先引入本文用到的一些符号、概念和引理.

记 $M_n(C)$，$M_n(R)$ 分别为 n 阶复矩阵和实矩阵所组成的集合. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，$\sigma(A)$ 为 A 的谱，I 为单位矩阵，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall S\subseteq N$，$|S|$ 表示集合 S 中元素的个数，$\bar{S}:=N\backslash S$ 且

$$r_i=\sum_{k\in N,k\neq i}|a_{ik}|,\ \forall i\in N;\qquad c_i=\sum_{k\in N,k\neq i}|a_{ki}|,\ \forall i\in N;$$

$$r_i^S=\sum_{k\in S,k\neq i}|a_{ik}|,\ \forall i\in N;\qquad c_i^S=\sum_{k\in S,k\neq i}|a_{ki}|,\ \forall i\in N;$$

$$Z^{n\times n}:=\{A=(a_{ij})\in M_n(R):a_{ij}\leq 0,\ \forall i,j\in N,i\neq j\}.$$

设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，其比较矩阵定义为 $\mu(A)=(u_{ij})$，其中 $u_{ij}=\begin{cases}|a_{ii}|,i=j,\\-|a_{ij}|,i\neq j.\end{cases}$ 设非空子集 $S=\{l_1,l_2,\cdots,l_k\}\subseteq N$，$A[S]$ 表示矩阵 A 的其行标列标均在 S 中的主子阵.

定义 1 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若存在非负矩阵 P 和实数 m 满足 $m>\rho(P)$，使 $A=mI-P$，其中 $\rho(P)$ 是 P 的谱半径，则称 A 为非奇异 M－矩阵.

定义 2 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若 A 的比较矩阵 $\mu(A)$ 是非奇异 M－矩阵，则称 A 为非奇异 H－矩阵.

定义 3 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若存在 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$|a_{ii}|>\alpha r_i+(1-\alpha)c_i,\ \forall i\in N,$$

则称 A 为 α－对角占优矩阵，记作 $A\in D(\alpha)$.

收稿日期：2012－10－18
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10961027）

作者简介：赵瑞娟（1988—），女，甘肃平凉人，硕士生，主要从事矩阵理论及其应用研究.
***通讯作者：**李耀堂（1958—），男，陕西宜川人，教授，博士生导师，主要从事数值计算及其应用研究. E-mail：liyaotang@ynu.edu.cn.

定义 4 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)\ (n \geq 2)$，若存在 $\alpha \in (0,1)$，使得

$$|a_{ii}||a_{jj}| > \alpha r_i r_j + (1-\alpha) c_i c_j,\ \forall i,j \in N, i \neq j,$$

则称 A 为双 α − 对角占优矩阵，记作 $A \in DD(\alpha)$.

定义 5 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$，若存在 $\alpha \in (0,1)$ 和 $k \in N$，使得对任意满足 $|S| = k$ 的非空子集 $S \subseteq N$ 有

$$|a_{ii}| > \alpha r_i^S + (1-\alpha) c_i^S + r_i^{\bar{S}},\ \forall i \in S,$$

则称 A 为广义 α − 对角占优矩阵，记作 $A \in GD(\alpha)$.

定义 6 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)\ (n \geq 2)$，若存在 $\alpha \in (0,1)$ 和 $k \in N\ (k \geq 2)$，使得对任意满足 $|S| = k$ 的非空子集 $S \subseteq N$ 如下条件成立：

1) $|a_{ii}| > r_i^{\bar{S}},\ \forall i \in S$;

2) $(|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}})(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}) > \alpha r_i^S r_j^S + (1-\alpha) c_i^S c_j^S,\ \forall i,j \in S, i \neq j.$

则称 A 为广义双 α − 对角占优矩阵，记作 $A \in DGD(\alpha)$.

注：由上述定义易知：$D(\alpha) \subseteq GD(\alpha)$；$DD(\alpha) \subseteq DGD(\alpha)$.

引理 1[1] 设 $A = (a_{ij}) \in Z^{n\times n}$，则 A 为 M − 矩阵的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0$，$A + \varepsilon I$ 为非奇异矩阵.

引理 2[1] 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$，则 A 为非奇异 M − 矩阵的充要条件是对任意 $0 \neq x \in R^n$，$y = Ax = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，存在 $i \in N$ 使得 $x_i y_i > 0$.

引理 3[2-3] 设 $A \in D(\alpha)$ 或 $A \in DD(\alpha)$，则 A 是非奇异 H − 矩阵.

引理 4 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ 是 M − 矩阵，若 $z \geq 0$ 使 $Az \leq 0$，则 $z = 0$.

证明 假设 $z \neq 0$，则 $z \geq 0$ 且 $z \neq 0$. 令 $y = Az = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$. 由 $Az \leq 0$ 知，$\forall i \in N, z_i y_i \leq 0$，这与引理 2 矛盾，因而 $z = 0$.

2 非奇异 H − 矩阵的判定条件

下面我们给出非奇异 H − 矩阵几个新的判定条件，这些条件改进了文献[2～3]的主要结果.

定理 1 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$，若存在 $k \in N$ 使得对任意满足 $|S| = k$ 的非空子集 $S \subseteq N$，矩阵

$$B^S(A) = \mu(A)[S] - \mathrm{diag}\{r_{l_1}^{\bar{S}}, r_{l_2}^{\bar{S}}, \cdots, r_{l_k}^{\bar{S}}\}$$

是 M − 矩阵，则 A 是非奇异的 H − 矩阵.

证明 先证 A 是非奇异，再证 A 的比较矩阵 $\mu(A)$ 是 M − 矩阵. 假若 A 是奇异的，则存在 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0$ 使得 $Ax = 0$. 令 $S = \{l_1, l_2, \cdots, l_k\} \subseteq N$ 使得 $|x_i| \geq |x_j|, \forall i \in S, \forall j \in \bar{S}$，取 $y = (x_{l_1}, x_{l_2}, \cdots, x_{l_k})^T$. 由 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0$ 知 $y \neq 0$ 且

$$\begin{aligned}|a_{l_i l_i}||x_{l_i}| &\leq \sum_{j\in S, j\neq l_i} |a_{l_i j}||x_j| + \sum_{j\in \bar{S}} |a_{l_i j}||x_j| \\ &\leq \sum_{j\in S, j\neq l_i} |a_{l_i j}||x_j| + |x_{l_i}| \sum_{j\in \bar{S}} |a_{l_i j}|, i = 1, 2, \cdots, k,\end{aligned}$$

即对任意 $i = 1, 2, \cdots, k$，

$$(|a_{l_i l_i}| - r_{l_i}^{\bar{S}})|x_{l_i}| \leq \sum_{j\in S, j\neq l_i} |a_{l_i j}||x_j|,$$

这就蕴含着 $B^S(A)|y| \leq 0$. 因 $B^S(A)$ 是 M − 矩阵，由引理 4 知 $y = 0$，这与 $y \neq 0$ 矛盾. 因此 A 是非奇异.

又因 $\forall S \subseteq N$ 且 $|S| = k$，$B^S(A)$ 是 M − 矩阵，所以 $\forall \varepsilon > 0$ 和 $\forall S \subset N$ 且 $|S| = k$ 有

$$B^S(\mu(A) + \varepsilon I) = B^S(A) + \varepsilon I$$

是 M − 矩阵. 由上述证明知 $\mu(A) + \varepsilon I$ 非奇异. 再由引理 1 知 $M(A)$ 是非奇异 M − 矩阵. 因此 A 是非奇异 H − 矩阵.

定理 2 若 $A = (a_{ij}) \in DGD(\alpha)$，则 A 是非奇异 H − 矩阵.

证明 设 $A = (a_{ij}) \in DGD(\alpha)$，由双广义 α − 对角占优矩阵的定义知，存在 $k \in N$ 使得对任意的 $S \subseteq N$ 且 $|S| = k$，$B^S(A) \in DD(\alpha)$，再由引理 3 知，$B^S(A)$ 是非奇异的 H − 矩阵. 又因 $M(B^S(A)) = B^S(A)$，所以 $B^S(A)$ 是 M − 矩阵. 于是由定理 1 知，A 是非奇异 H − 矩阵.

类似于定理 2 的证明，可得到如下定理.

定理 3 若 $A = (a_{ij}) \in GD(\alpha)$，则 A 是非奇异的 H − 矩阵.

3 $GD(\alpha)$ 和 $DGD(\alpha)$ 中矩阵的充要条件

下面讨论 $GD(\alpha)$ 和 $DGD(\alpha)$ 中矩阵的性质.

定理 4 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$，则 $A \in GD(\alpha)$ 的充分必要条件是存在 $k \in N$ 使得对任意满足 $|S| = k$

的 $S \subseteq N$ 有:

1) $|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}} > \min\{r_i^S, c_i^S\}, \forall i \in S$;

2) $\dfrac{|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}} - c_i^S}{r_i^S - c_i^S} > \dfrac{c_j^S + r_j^{\bar{S}} - |a_{jj}|}{c_j^S - r_j^S}, \forall i \in \{i \in S: r_i^S > c_i^S\}, \forall j \in \{j \in S: r_j^S < c_j^S\}$.

证明　必要性. 由 $A \in GD(\alpha)$ 知,存在 $\alpha \in (0,1)$ 和 $k \in N$,使得对任意满足 $|S| = k$ 的非空子集 $S \subseteq N$ 有

$$|a_{ii}| > \alpha r_i^S + (1-\alpha)c_i^S + r_i^{\bar{S}}, \forall i \in S. \tag{1}$$

因 $\alpha \in (0,1)$,所以对任意的 $i \in S$ 有

$$\alpha r_i^S + (1-\alpha)c_i^S > \min\{r_i^S, c_i^S\},$$

因此条件 1)成立.

而对 $i \in \{i \in S: r_i^S > c_i^S\}$ 有 $r_i^S > c_i^S$,再结合(1)式得

$$\frac{|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}} - c_i^S}{r_i^S - c_i^S} > \alpha. \tag{2}$$

同理可得当 $j \in \{j \in S: r_j^S < c_j^S\}$,有

$$\frac{c_j^S + r_j^{\bar{S}} - |a_{jj}|}{c_j^S - r_j^S} < \alpha, \tag{3}$$

由(2)式和(3)式即得条件 2)成立.

充分性. 由已知条件得,存在 $k \in N$ 使得对任意满足 $|S| = k$ 的 $S \subseteq N$,条件 1),2)成立. 于是当 $i \in \{i \in S: r_i^S = c_i^S\}$ 时,由条件 1)知,对任何 $\alpha \in (0,1)$,(1)式成立;当 $i \in \{i \in S: r_i^S > c_i^S\}$ 时,由条件 1)知,$|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}} > c_i^S$. 所以有

$$\frac{|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}} - c_i^S}{r_i^S - c_i^S} > 0. \tag{4}$$

同理可证当 $j \in \{j \in S: r_j^S < c_j^S\}$ 时有

$$\frac{c_j^S + r_j^{\bar{S}} - |a_{jj}|}{c_j^S - r_j^S} < 1, \tag{5}$$

于是由条件 2),(4)和(5)式知,存在 $\alpha \in (0,1)$,使得对任意 $i \in \{i \in S: r_i^S > c_i^S\}$ 和 $j \in \{j \in S: r_j^S < c_j^S\}$ 有

$$\max\left\{0, \frac{c_j^S + r_j^{\bar{S}} - |a_{jj}|}{c_j^S - r_j^S}\right\} < \alpha < \min\left\{\frac{|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}} - c_i^S}{r_i^S - c_i^S}, 1\right\},$$

由上式左边知,对 $i \in \{i \in S: r_i^S > c_i^S\}$ 有

$$\alpha(r_i^S - c_i^S) < |a_{ii}| - r_i^{\bar{S}} - c_i^S,$$

即(1)式成立. 由上式右边知,对 $j \in \{j \in S: r_j^S < c_j^S\}$ 有

$$c_j^S + r_j^{\bar{S}} - |a_{jj}| < \alpha(c_j^S - r_j^S),$$

即(1)式成立;于是有当 $i \in S$ 时,(1)式都成立,即 $A \in GD(\alpha)$.

类似于定理 4 的证明,可得如下定理.

定理 5　设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ $(n \geq 2)$,则 $A \in DGD(\alpha)$ 的充分必要条件是存在 $k \in N$ $(k \geq 2)$,使得对任意满足 $|S| = k$ 的 $S \subseteq N$ 有:

1) $|a_{ii}| > r_i^{\bar{S}}, \forall i \in S$;

2) $(|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}})(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}) > \min\{r_i^S r_j^S, c_i^S c_j^S\}, \forall i,j \in S, i \neq j$;

3) $\dfrac{(|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}})(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}) - c_i^S c_j^S}{r_i^S r_j^S - c_i^S c_j^S} > \dfrac{c_l^S c_m^S - (|a_{ll}| - r_l^{\bar{S}})(|a_{mm}| - r_m^S)}{c_l^S c_m^S - r_l^S r_m^S}$,

$\forall (i,j) \in \{(i,j): r_i^S r_j^S > c_i^S c_j^S, \forall i,j \in S, i \neq j\}, \forall (l,m) \in \{(i,j): r_i^S r_j^S < c_i^S c_j^S, \forall i,j \in S, i \neq j\}$.

4　矩阵特征值的包含区域

2011 年,L. Cvetkovic 等在文献[4]中给出关于矩阵特征值包含区域的如下定理:

定理 6[4]　设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ $(n \geq 2)$,则

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma_1(A) \cup \widetilde{\Gamma}(A),$$

其中 $$\overline{\Gamma}(A)=\bigcup_{i\in N}\{z\in C:|z-a_{ii}|\le\min\{r_i,c_i\}\};$$

$$\widetilde{\Gamma}(A)=\bigcup_{\substack{i\in\{i\in N:r_i>c_i\},\\ j\in\{j\in N:r_j<c_j\}}}\{z\in C:|z-a_{ii}|(c_j-r_j)+|z-a_{jj}|(r_i-c_i)\le c_jr_i-c_ir_j\}.$$

2011 年，李朝迁和李耀堂在文献[3]中给出了矩阵特征值的如下包含区域，并改进了文献[4]中的结果.

定理 7[3] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)\ (n\ge 2)$，则

$$\sigma(A)\subseteq K_1(A)=\overline{K}(A)\cup\widetilde{K}(A),$$

其中 $$\overline{K}(A)=\bigcup_{i,j\in N,i\neq j}\{z\in C:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\le\min\{r_ir_j,c_ic_j\}\};$$

$$\widetilde{K}(A)=\bigcup_{\substack{(i,j)\in\{r_ir_j>c_ic_j,i\neq j\}\\ (l,m)\in\{r_lr_j<c_lc_j,i\neq j\}}}\{z\in C:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|(c_lc_m-r_lr_m)+|z-a_{ll}||z-a_{mm}|(r_ir_j-c_ic_j)\le c_lc_mr_ir_j-c_ic_jr_lr_m\}.$$

下面应用 $GD(\alpha)$ 和 $DGD(\alpha)$ 的性质，给出矩阵特征值的几个新的包含区域，这些结论优于文献[3]和文献[4]中的结果.

定理 8 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)\ (n\ge 2)$，则

$$\sigma(A)\subseteq T_1(A)=\bigcap_{\substack{k\in N\\ 2\le k\le n}}\bigcup_{\substack{S\subseteq N\\ |S|=k}}\Psi_1^S(A),$$

其中 $$\Psi_1^S(A)=\overline{\Gamma}^S(A)\cup\widetilde{\Gamma}^S(A),$$

$$\overline{\Gamma}^S(A)=\bigcup_{i\in S}\{z\in C:|z-a_{ii}|\le\min\{r_i^S,c_i^S\}+r_i^{\bar S}\};$$

$$\widetilde{\Gamma}^S(A)=\bigcup_{\substack{i\in\{r_i^S>c_i^S\},\\ j\in\{r_j^S<c_j^S\}}}\{z\in C:(|z-a_{ii}|-r_i^{\bar S})(c_j^S-r_j^S)+(|z-a_{jj}|-r_j^{\bar S})(r_i^S-c_i^S)\le c_j^Sr_i^S-c_i^Sr_j^S\}.$$

证明 对 $\forall\lambda\in\sigma(A)$，$\lambda I-A$ 是奇异的. 又因 $\lambda I-A$ 与 A 的非主对角线元素的模相同，所以任意的非空子集 $S\subseteq N$，矩阵 $\lambda I-A$ 与 A 具有相同的 $i\in\{i\in S:r_i^S>c_i^S\}$，$j\in\{j\in S:r_j^S<c_j^S\}$. 若 $\lambda\notin T_1(A)$，则存在 $k\in N$ 使 $\lambda\notin\bigcup_{S\subseteq N,|S|=k}\Psi_1^S(A)$，于是对任意满足 $|S|=k$ 的 $S\subseteq N$ 定理 4 的条件 1)，2)成立，所以 $\lambda I-A\in GD(\alpha)$. 由定理 3 知，$\lambda I-A$ 非奇异，这与 $\lambda I-A$ 奇异相矛盾. 因此 $\lambda\in T_1(A)$，即 $\sigma(A)\subseteq T_1(A)$.

类似于定理 8 的证明，可得到如下定理.

定理 9 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)\ (n\ge 2)$，则

$$\sigma(A)\subseteq\Lambda_1(A)=\bigcap_{\substack{k\in N\\ 2\le k\le n}}\bigcup_{\substack{S\subseteq N\\ |S|=k}}H_1^S(A),$$

其中 $$H_1^S(A)=\Gamma^S(A)\cup\overline{K}^S(A)\cup\widetilde{K}^S(A),$$

$$\Gamma^S(A)=\bigcup_{i\in S}\{z\in C:|z-a_{ii}|\le r_i^{\bar S}\},$$

$$\overline{K}^S(A)=\bigcup_{i,j\in S,i\neq j}\{z\in C:(|z-a_{ii}|-r_i^{\bar S})(|z-a_{jj}|-r_j^{\bar S})\le\min\{r_i^Sr_j^S,c_i^Sc_j^S\}\};$$

$$\widetilde{K}^S(A)=\bigcup_{\substack{(i,j)\in\{r_i^Sr_j^S>c_i^Sc_j^S,\forall i,j\in S,i\neq j\},\\ (l,m)\in\{r_i^Sr_j^S<c_i^Sc_j^S,\forall i,j\in S,i\neq j\}}}\{z\in C:(|z-a_{ii}|-r_i^{\bar S})(|z-a_{jj}|-r_j^{\bar S})(c_l^Sc_m^S-r_l^Sr_m^S)+(|z-a_{ll}|-r_l^{S})$$
$$(|z-a_{mm}|-r_m^{S})(r_i^Sr_j^S-c_i^Sc_j^S)\le c_l^Sc_m^Sr_i^Sr_j^S-c_i^Sc_j^Sr_l^Sr_m^S\}.$$

注：由 $\Gamma_1(A)$，$K_1(A)$，$T_1(A)$，$\Lambda_1(A)$ 的定义容易知道

$$T_1(A)\subseteq\Gamma_1(A);\Lambda_1(A)\subseteq K_1(A).$$

这说明定理 8 和定理 9 改进了文献[3]和文献[4]中关于矩阵特征值包含区域的结果.

[参考文献]

[1]陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 第 2 版. 北京：科学出版社，2007.
[2]CVETKOVIC L. H – matrix theory vs eigenvalue localization[J]. Numerical Algorithms，2006，42(3)：229 – 245.
[3]LI Chao-qian，LI Yao-tang. Generalizations of Brauer's eigenvalue localization theorem[J]. Electronic Journal of Linear Algebra，2011，22：1168 – 1178.
[4]CVETKOVIC L，KOSTIC V，BRU R，et al. A simple generalization of Gersgorin's theorem[J]. Advances in Computational Mathematics，2011，35：271 – 280.
[5]黄守德，高磊，李耀堂. 复矩阵特征值及其最小奇异值的估计[J]. 昆明学院学报，2011，33(6)：1 – 5.