昆明学院学报　2018，40（6）：58～66　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

具有脉冲和积分边值条件的分数阶微分方程的解

刘凤娟[1]，王会玫[2*]
（1. 云南大学 数学系，云南 昆明 650091；2. 昆明学院 数学系，云南 昆明 650214）

摘要：由于分数阶微分方程在实际应用中有着比整数阶微分方程更加广泛的范围．因此，提出及探讨了具有脉冲和非局部黎曼－刘维尔积分边值条件的分数阶微分方程解的存在唯一性问题，并使用分析技巧将问题转化成一个与之等价的积分方程，同时运用 Schaefer 不动点定理、Schauder 不动点定理和 Banach 压缩映射原理得到解的存在唯一性的充分条件，然后举例验证了结论的有效性．

关键词：黎曼－刘维尔积分边值条件；脉冲；分数阶微分方程；不动点定理
中图分类号：O193　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639（2018）06－0058－09
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2018.06.012

Solutions for Fractional Differential Equations with Impulsive and Integral Boundary Conditions

LIU Fengjuan[1]，WANG Huimei[2*]
（1. Department of Mathematics，Yunnan University，Kunming，Yunnan，China　650091；
2. Department of Mathematics，Kunming University，Kunming，Yunnan，China　650214）

Abstract：Compared with the integral differential equations，the fractional differential equations are more useful in reality，so the problem of fractional differential equations with impulsive and nonlocal Riemann-Liouville integral boundary conditions is proposed. With some analytical technique，the considered system is converted into an equivalent integral equation. Then by applying Schaefer′s fixed point theorem，the Schauder fixed point theorem and Banach contraction principle，several sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solutions are obtained. At last，the example is given to illustrate the effectiveness of the main results.

Key words：Riemann-Liouville integral boundary conditions；impulses；fractional differential equations；fixed point theorem

由于分数阶微分方程有着深刻的物理背景和丰富的理论内涵，与整数阶微分方程相比较，分数阶微分方程能够更现实地描述一些现象，因此在实际应用中有着比整数阶微分方程更加广泛的前景．近年来，分数阶微分方程被作为复杂介质的空气动力学、工程、电动力学等系统建模和过程记忆模型描述的主要工具，在很多领域中越来越受到关注．关于分数阶的基本知识见文献［1～2］．由于分数阶微分方程的广泛应用，因此，其发展相当快．例如：Miller 等[3]、Agarwal 等[4]、Wang 等[5]、Ahmad 等[6]和 Zhang 等[7]的一些经典算法证明了分数阶微分方程边值问题解的存在唯一性．

另一方面，当动力系统在某时刻发生一些突然变化，如地震、收割、震动等，则脉冲方程可提供一个更接近现实的系统建模框架．因此，许多学者[8-11]对相关脉冲微分方程进行了深入研究．

受文献［6］和［12］的启发，本文运用 Schaefer 不动点定理、Schauder 不动点定理和 Banach 不动点定理，研究了在脉冲和非局部 Riemann-Liouville 积分边值条件下的分数阶微分方程解的存在唯一性：

收稿日期：2018－01－21
基金项目：云南省教育厅基金资助项目（2017YJS111）．
作者简介：刘凤娟（1990—），女，河南周口人，在读硕士，主要从事微分方程动力系统研究．
*通讯作者：王会玫（1979—），女，云南玉溪人，副教授，在读博士，主要从事微分方程动力系统研究，E-mail：wanghmei@163.com.

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^q u(t) = g(t,u(t)), t \in J', \\ \Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \Delta u'(t_k) = I_k^*(u(t_k)), k = 1,2,\cdots m, \\ u(0) = aI^\beta u(\eta) = a\int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(s,u(s))\mathrm{d}s, \\ u(1) = bI^\alpha u(\alpha) = b\int_0^\sigma \frac{(\sigma - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_2(s,u(s))\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{1}$$

其中${}^cD_{0^+}^q$是 q（$1<q\leqslant 2$）阶的 Caputo 分数阶导数，a，b，η，σ 为常数，$0<\eta,\sigma<1, 0<\alpha,\beta\leqslant 1, g\in C(J\times R, R), I_k I_k^* \in C(R,R), J=[0,1], 0=t_0<t_1<\cdots t_m<t_{m+1}=1, J'=J\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}, m\in N, \Delta u(t_k)=u(t_k{}^+)-u(t_k{}^-)$，$\Delta u'(t_k)=u'(t_k{}^+)-u'(t_k{}^-), u(t_k{}^+), u(t_k{}^-)$分别表示 $u(t)$在 $t=t_k(k=1,2,\cdots,m)$处的右极限和左极限.

1　预备知识

在本节中，我们将介绍一些基础知识.

设 $J_0=[0,t_1], J_1=(t_1,t_2],\cdots,J_{m-1}=(t_{m-1},t_m], J_m=(t_m,1], PC(J,R)=\{u:[0,1]\to R: u\in C(J'), u(t_k{}^+), u(t_k{}^-)$存在且$1\leqslant k\leqslant m\}$,则 $PC(J)$在范数 $\|u\|=\sup\limits_{t\in J}|u(t)|F$ 是 Banach 空间.

定义 1[1]　对于连续函数 g：（0，∞）$\to R$，定义 g 的 q 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数如下：

$$I_{0^+}^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-q}}\mathrm{d}s, (\text{其中 } q>0),$$

假设右边的积分存在.

定义 2[1]　对至少 n 次连续可微函数 $g:(0,\infty)\to R$，定义函数 g 的 q 阶 Caputo 导数如下：

$${}^CD_{0^+}^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n-1<q<n, n=[q]+1, [q]$表示不大于 q 的最大整数.

引理 1[1]　设 $q>0$，则微分方程${}^cD_{0^+}^q u(t)=0$ 的解可表示为：

$$u(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1},$$

其中 $c_i\in R$，$i=0$，1，…，$n-1$，且 $n=[q]+1$.

引理 2[1]　对 $q>0$，有

$$I^q({}^cD_{0^+}^q u)(t)=u(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1},$$

其中 $c_i\in R$，$i=0$，1，…，$n-1$，且 $n=[q]+1$.

引理 3[13]　（Ascoli-Arzela 定理）设 $S=\{s(t)\}$是一个由连续映射 s：$[a,b]\to R$ 构成的函数族. 若对于任意的 $t^*\in[a,b]$，S 是一致有界且等度连续的，则集合$\{s(t^*)\}$是相对紧的，且在 S 中存在一致收敛函数序列$\{s_n(t)\}$（$n=1$，2，…，$t\in[a,b]$）.

引理 4[13]　（Schaefer 不动点定理）设 F：$R\to R$ 是一个全连续算子，若集合 $E(F)=\{u\in R: u=\lambda Fu, \forall\lambda\in[0,1]\}$是有界的，则 F 有不动点.

引理 5[14]　设 B 是一个 Banach 空间，假设 Ω 是 B 的一个有界开子集，$0\in\Omega$，令 F：$\overline{\Omega}\to R$ 是一个全连续算子，满足 $\|Fu\|\leqslant\|u\|$，则 F 在$\overline{\Omega}$中有不动点.

引理 6　设 $1<q\leqslant 2$，g：$J\to R$ 为连续函数，$0<\alpha$，$\beta\leqslant 1$，$k=1$，2，…，m，则带有分数阶边值条件的脉冲分数阶微分方程

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^q u(t) = g(t), t \in J', \\ \Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \Delta u'(t_k) = I_k{}^*(u(t_k)), k = 1,2,\cdots m, \\ u(0) = aI^\beta u(\eta) = a\int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(s,u(s))\mathrm{d}s, \\ u(1) = bI^\alpha u(\alpha) = b\int_0^\sigma \frac{(\sigma - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_2(s,u(s))\mathrm{d}s, 0<\alpha,\beta<1. \end{cases} \tag{2}$$

等价于以下积分方程：

$$u(t)=\begin{cases}\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s)\mathrm{d}s-t\int_{t_m}^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s)\mathrm{d}s+\zeta,t\in J_0,\\ \int_{t_k}^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s)\mathrm{d}s-t\int_{t_m}^1\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s)\mathrm{d}s\\ +\sum_i^k\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s)\mathrm{d}s+I_i(u(t_i))\right]\\ +\sum_i^k(t-t_i)\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}g(s)\mathrm{d}s+I_i^*(u(t_i))\right]+\zeta,t\in J_k,k=1,2,\cdots,m.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\zeta=-t\sum_{i=1}^m[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s)\mathrm{d}s+I_i(u(t_i))]-t\sum_{i=1}^m(1-t_i)[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}g(s)\mathrm{d}s+I_i{}^*(u(t_i))]+a(1-t)\int_0^\eta\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f_1(s)\mathrm{d}s+tb\int_0^\sigma\frac{(\sigma-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_2(s)\mathrm{d}s.$

证明 令 u 是（2）式的解，则由引理2，对 $t\in J_0=[0,t_1]$，存在常数 c_0，$c_1\in R$ 使得

$$\begin{cases}u(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s-c_0-c_1t,\\ u'(t)=\frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^t(t-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s-c_1.\end{cases}\tag{4}$$

对 $t\in J_1=(t_1,t_2]$,存在常数 d_0,d_1,使得

$$\begin{cases}u(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^t(t-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s-d_0-d_1(t-t_1),\\ u'(t)=\frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_{t_1}^t(t-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s-d_1.\end{cases}$$

由脉冲条件 $\Delta u(t_1)=u(t_1^+)-u(t_1^-)=I_1(u(t_1))$,$\Delta u'(t_1)=u'(t_1{}^+)-u'(t_1{}^-)=I_1^*(u(t_1))$,

从而有

$$\begin{cases}u(t_1{}^+)=-d_0,\\ u(t_1{}^-)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s-c_0-c_1t,\\ u'(t_1{}^+)=-d_1,\\ u'(t_1{}^-)=\frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s-c_1.\end{cases}\tag{5}$$

即

$$\begin{cases}-d_0=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s-c_0-c_1t_1+I_1(u(t_1)),\\ -d_1=\frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s-c_1+I_1^*(u(t_1)).\end{cases}\tag{6}$$

因此,对 $t\in J_1$,有

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^t(t-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s\\&+\frac{(t-t_1)}{\Gamma(q-1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s+(t-t_1)I_1^*(u(t_1))\\&+I_1(u(t_1))-c_0-c_1t.\end{aligned}$$

类似地,对 $t\in J_k(k=1,2,\cdots,m)$,有

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_k}^t(t-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s\\&+\sum_i^kI_i(u(t_i))+\sum_{i=1}^k\frac{(t-t_i)}{\Gamma(q-1)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$+\sum_{i}^{k}(t-t_i)I_i^*(u(t_i))-c_0-c_1t. \tag{7}$$

根据积分边值条件,得

$$u(0)=a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f_1(s)\mathrm{d}s,$$

$$u(1)=b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_2(s)\mathrm{d}s.$$

综合(4) 式和(7) 式,有

$$u(0)=c_0,$$

$$u(1)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_m}^{1}(1-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{i}^{m}I_i(u(t_i))+\sum_{i=1}^{m}\frac{(1-t_i)}{\Gamma(q-1)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s,$$

再由积分边值条件,得

$$c_0=-a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f_1(s)\mathrm{d}s,$$

$$c_1=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_m}^{1}(1-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}g(s)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{i}^{m}I_i(u(t_i))+\sum_{i=1}^{m}\frac{(1-t_i)}{\Gamma(q-1)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-2}g(s)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{i}^{m}(1-t_i)I_i^*(u(t_i))+a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f_1(s)\mathrm{d}s$$
$$-b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-s)\alpha^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}f_2(s)\mathrm{d}s.$$

将 c_0,c_1 代入(4) 式和(7) 式,得(3) 式;反之,设 u 为(3) 式的解,经过类似地推导容易得到 u 也是(2) 式的解.

2　主要结论

首先定义算子 $F:PC([0,1],R)\to PC([0,1],R)$ 如下:

$$Fu(t)=\int_{t_k}^{t}\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s-t\int_{t_m}^{1}\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s+I_i(u(t_i))\right], \tag{8}$$

其中

$$\zeta=-t\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s+I_i(u(t_i))\right]$$
$$-t\sum_{i=1}^{m}(1-t_i)\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}g(s,u(s))\mathrm{d}s+I_i{}^*(u(t_i))\right]$$
$$+a(1-t)\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f_1(s,u(s))\mathrm{d}s+b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_2(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

全文假设:

(H1) $g:R\to R$ 为连续函数,且对 $\forall t\in J,u_1,u_2\in R$,满足 Lipschitz 条件,即存在常数 $L_1>0$,使得

$$|g(t,u_1)-g(t,u_2)|\leqslant L_1|u_1-u_2|;$$

(H2) I_k,I_k^*,f_1,f_2 为连续函数且满足 Lipschitz 条件,Lipschitz 常数分别为:

$$L_2,L_3,L_4,L_5>0.$$

定理 1　假设(H1) 和(H2) 成立,且

$$H=\frac{4m+2}{\Gamma(q)}L_1+2mL_2+2mL_3+\frac{a}{\Gamma(\beta+1)}L_4+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}L_5<1,$$

则系统(1) 有唯一解.

证明 对 $\forall t\in J$,定义 $B_h=\{u\in PC(J,R);|u|\leqslant h\}$,且

$$h\geqslant\frac{(4m+2)M_1+2mM_2\Gamma(q)+2mM_3\Gamma(q)+\frac{aM_4}{\Gamma(\beta+1)}\Gamma(q)+\frac{bM_5}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(q)}{\Gamma(q)-(4m+2)L_1-2mL_2\Gamma(q)-2mL_3\Gamma(q)-\frac{a}{\Gamma(\beta+1)}\Gamma(q)-\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(q)},$$

其中$\sup\limits_{t\in J}|g(t,0)|=M_1,\max|I_k(0)|=M_2,\max|I_k^*(0)|=M_3,\sup\limits_{t\in J}|f_1(t,0)|=M_4,\sup\limits_{t\in J}|f_2(t,0)|=M_5$.

显然,F 在 $PC(J,R)$ 上是良定义的. 首先证明 $F:B_h\to B_h$. 对任意的 $t\in J_k,x\in B_h$,有

$$\begin{aligned}
|Fu(t)|\leqslant&\int_{t_k}^{t}\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|g(s,u(s))-g(s,0)|+|g(s,0)|)\mathrm{d}s\\
&+\int_{t_m}^{1}\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|g(s,u(s))-g(s,0)|+|g(s,0)|)\mathrm{d}s\\
&+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|g(s,u(s))-g(s,0)|+|g(s,0)|)\mathrm{d}s\\
&+\sum_{i=1}^{k}(|I_i(u(t_i))-I_i(0)|+|I_i(0)|)\\
&+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}(|g(s,u(s))-g(s,0)|+|g(s,0)|)\mathrm{d}s\\
&+\sum_{i=1}^{k}(|I_i^*(u(t_i))-I_i^*(0)|+|I_i^*(0)|)\\
&+\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(|g(s,u(s))-g(s,0)|+|g(s,0)|)\mathrm{d}s\\
&+\sum_{i=1}^{m}(|I_i(u(t_i))-I_i(0)|+|I_i(0)|)\\
&+\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}(|g(s,u(s))-g(s,0)|+|g(s,0)|)\mathrm{d}s\\
&+\sum_{i=1}^{m}(|I_i^*(u(t_i))-I_i^*(0)|+|I_i^*(0)|)\\
&+a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(|f_1(s,u(s)-f_1(s,0)|+|f_1(s,0)|)\mathrm{d}s\\
&+b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(|f_2(s,u(s)-f_2(s,0)|+|f_2(s,0)|)\mathrm{d}s\\
\leqslant&\frac{L_1}{\Gamma(q+1)}\|u\|+\frac{M_1}{\Gamma(q+1)}+\frac{L_1}{\Gamma(q+1)}\|u\|+\frac{M_1}{\Gamma(q+1)}+\frac{mL_1}{\Gamma(q+1)}\|u\|\\
&+\frac{mM_1}{\Gamma(q+1)}+mL_1\|u\|+mM_2+\frac{mL_1}{\Gamma(q)}\|u\|+\frac{mM_1}{\Gamma(q)}+mL_3\|u\|\\
&+mM_3+\frac{mL_1}{\Gamma(q+1)}\|u\|+\frac{mM_1}{\Gamma(q+1)}+mL_2\|u\|+mM_2+\frac{mL_1}{\Gamma(q)}\|u\|\\
&+\frac{mM_1}{\Gamma(q)}+mL_3\|u\|+mM_3+\frac{aL_4}{\Gamma(\beta+1)}\|u\|+\frac{aM_4}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{bL_5}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|+\frac{bM_5}{\Gamma(\alpha+1)}\\
\leqslant&\frac{4m+2}{\Gamma(q)}(L_1\|u\|+M_1)+2m(L_2\|u\|+M_2)+2m(L_3\|u\|+M_3)\\
&+\frac{a}{\Gamma(\beta+1)}(L_4\|u\|+M_4)+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}(L_5\|u\|+M_4)\leqslant h.
\end{aligned}$$

所以 $F(B_h) \subset B_h$，即 F 是 B_h 上的自映射.

以下证明 F 是 B_h 上的压缩映射：

对任意的 $u_1, u_2 \in B_h$，$\forall t \in J_k (k = 1,2,\cdots,m)$，有

$$
\begin{aligned}
|Fu_1(t) - Fu_2(t)| \leqslant & \int_{t_k}^{t} \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u_1(s)) - g(s,u_2(s))| \mathrm{d}s \\
& + \int_{t_m}^{1} \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u_1(s)) - g(s,u_2(s))| \mathrm{d}s \\
& + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u_1(s)) - g(s,u_2(s))| \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k} |I_i(u_1(t_i)) - I_i(u_2(t_i))| \\
& + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u_1(s)) - g(s,u_2(s))| \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m} |I_i(u_1(t_i)) - I_i(u_2(t_i))| \\
& + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |g(s,u_1(s)) - g(s,u_2(s))| \mathrm{d}s \\
& + \sum_{i=1}^{m} |I_i^*(u_1(t_i)) - I_i^*(u_2(t_i))| + a\int_0^{\eta} \frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |f_1(s,u_1(s)) - f_1(s,u_2(s))| \mathrm{d}s \\
& + b\int_0^{\sigma} \frac{(\sigma-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_2(s,u_1(s)) - f_2(s,u_2(s))| \mathrm{d}s \\
\leqslant & \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} \|u_1 - u_2\| + \frac{L_1}{\Gamma(q+1)} \|u_1 - u_2\| + \frac{mL_1}{\Gamma(q+1)} \|u_1 - u_2\| + mL_2 \|u_1 - u_2\| \\
& + \frac{mL_1}{\Gamma(q+1)} \|u_1 - u_2\| + mL_3 \|u_1 - u_2\| + \frac{mL_1}{\Gamma(q+1)} \|u_1 - u_2\| + mL_2 \|u_1 - u_2\| \\
& + \frac{mL_1}{\Gamma(q)} \|u_1 - u_2\| + mL_3 \|u_1 - u_2\| + \frac{aL_4}{\Gamma(\beta+1)} \|u_1 - u_2\| + \frac{bL_5}{\Gamma(\alpha+1)} \|u_1 - u_2\| \\
\leqslant & \left(\frac{(4m+2)L_1}{\Gamma(q)} + 2mL_2 + 2mL_3 + \frac{aL_4}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{bL_5}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \|u_1 - u_2\| \leqslant \|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}
$$

从而 F 是 B_h 上的压缩映射. 根据 Banach 不动点定义，得到 F 在 B_h 中有一个不动点，也即系统(1) 在 $PC(J,R)$ 上有唯一解，证毕.

以下运用 Schaefer 不动点定理证明系统(1) 解的存在性. 为此，假设：

(H3) 设 $\Omega \in C(J,R)$ 为有界开子集，而且存在常数 $M_i (i = 1,2,\cdots,5)$，使得 $|g(t,u)| < M_1$，$|I_k(u(t_k))| < M_2$，$|I_k^*(u(t_k))| < M_3$，$|f_1(t,u)| < M_4$，$|f_2(t,u)| < M_5$；

(H4) 存在常数 $c_i > 0 (i = 1,2,3,4,5)$，使得 $c_i L_i = M_i (i = 1,2,3,4,5)$.

以下记 $c = \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$.

定理 2　设条件(H3) 和(H4) 成立，则系统(1) 在 $C(J,R)$ 至少有一个不动点.

证明　定理的证明可分解为以下 4 个步骤：

1) 显然 F 是一个连续算子.

2) 对任意的 $u(t) \in C(J,R)$，有

$$
\begin{aligned}
|Fu(t)| \leqslant & \int_{t_k}^{t} \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u(s))| \mathrm{d}s + \int_{t_m}^{1} \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u(s))| \mathrm{d}s \\
& + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u(s))| \mathrm{d}s + \sum_{i}^{k} |I_i(u(t_i))| \\
& + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |g(s,u(s))| \mathrm{d}s + \sum_{i}^{k} |I_i^*(u(t_i))| \\
& + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |g(s,u(s))| \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m} |I_i(u(t_i))|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|g(s,u(s))|\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m}|I_i^*(u(t_i))|\\
&+a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|f_1(s,u(s))|\mathrm{d}s+b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f_2(s,u(s))|\mathrm{d}s\\
&\leqslant\frac{L'_1}{\Gamma(q+1)}+\frac{L'_1}{\Gamma(q+1)}+\frac{mL'_1}{\Gamma(q+1)}+mL'_2+\frac{mL'_1}{\Gamma(q)}+mL'_3+\frac{mL'_1}{\Gamma(q+1)}\\
&+mL'_2+\frac{mL'_1}{\Gamma(q)}+mL'_3+\frac{aL'_4}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{b'_5}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&\leqslant\frac{(4m+2)L'_1}{\Gamma(q+1)}+2mL'_2+2mL'_3+\frac{aL'_4}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{bL'_5}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&=\frac{(4m+2)c_1L_1}{\Gamma(q+1)}+2mc_2L_2+2mc_3L_3+\frac{ac_4L'_4}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{bc_5L'_5}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&\leqslant c\left(\frac{(4m+2)L_1}{\Gamma(q+1)}+2mL_2+2mL_3+\frac{aL'_4}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{bL'_5}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leqslant c.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

从而 F 是一致有界的.

3) 对任意的 $u(t)\in C(J,R)$,有

$$
\begin{aligned}
|(Fu)'(t)|\leqslant&\int_{t_k}^{t}\frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|g(s,u(s))|\mathrm{d}s+\int_{t_m}^{1}\frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|g(s,u(s))|\mathrm{d}s\\
&+\sum_{i=1}^{k}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-3}}{\Gamma(q-2)}|g(s,u(s))|\mathrm{d}s+|I_i^*(u(t_i))|\right]\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}|g(s,u(s))|\mathrm{d}s+|I_i(u(t_i))|\right]\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-3}}{\Gamma(q-2)}|g(s,u(s))|\mathrm{d}s+|I_i^*(u(t_i))|\right]\\
&+a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}|f_1(s,u(s))|\mathrm{d}s+b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}|f_2(s,u(s))|\mathrm{d}s\\
\leqslant&\frac{L'_1}{\Gamma(q)}+\frac{L'_1}{\Gamma(q)}+\frac{mL'_1}{\Gamma(q-1)}+mL'_3+\frac{mL'_1}{\Gamma(q)}+mL'_2\\
&+\frac{mL'_1}{\Gamma(q-1)}+mL'_3+\frac{aL'_4}{\Gamma(\beta)}+\frac{bL'_5}{\Gamma(\alpha)}\\
\leqslant&\frac{(3m+2)L'_1}{\Gamma(q)}+mL'_2+2mL'_3+\frac{aL'_4}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{bL'_5}{\Gamma(\alpha-1)}\leqslant c.
\end{aligned}
$$

于是,对 $t_1,t_2\in[0,1]$,当 $t_1<t_2$ 时,有

$$
|(Fu)(t_1)-(Fu)(t_2)|=\int_{t_1}^{t_2}|(Fu)'(s)|\mathrm{d}s\leqslant c(t_2-t_1),
$$

由上式可知,当 $t_2\to t_1$ 时,不等式右端趋于 0,从而推出 F 是等度连续的,即 F 在 Ω 上是相对紧的,运用 Ascoli-Arzela 定理,知 $F:C(J,R)\to C(J,R)$ 是全连续的.

4) 设 $E(F)=\{u\in C(J,R),u=\lambda Fu;0<\lambda<1\}$,对 $u\in E(F)$,$u(t)=\lambda Fu(t)$,其中 $\lambda\in(0,1)$,有

$$
\begin{aligned}
u(t)=&\int_{t_k}^{t}\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s-t\int_{t_m}^{1}\frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s\\
&+\sum_{i=1}^{k}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s+I_i(u(t_i))\right]\\
&+\sum_{i=1}^{k}(t-t_i)\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}g(s,u(s))\mathrm{d}s+I_i^*(u(t_i))\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-t\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}g(s,u(s))\mathrm{d}s+I_i(u(t_i))\right]\\
&-t\sum_{i=1}^{k}(1-t_i)\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}g(s,u(s))\mathrm{d}s+I_i^*(u(t_i))\right]\\
&+a(1-t)\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f_1(s,u(s))\mathrm{d}s+b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f_2(s,u(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

从而有 $\|u\|=\sup|\lambda(Fu)(t)|\leqslant\|Fu(t)\|\leqslant c$，得到 $E(F)$ 是有界的，由 Schaefer 不动点定理，系统(1) 至少有一个解. 证毕.

定理 3　假设(H3) 成立，且

$$
\text{(H5)}\ \lim_{u\to0}\frac{f(t,u)}{u}=0,\lim_{u\to0}\frac{I_k(u)}{u}=0,\lim_{u\to0}\frac{I_k^*(u)}{u}=0,\lim_{u\to0}\frac{f_1(t,u)}{u}=0,\lim_{u\to0}\frac{f_2(t,u)}{u}=0,
$$

则系统(1) 至少存在一个解.

证明　考虑定理 2 中定义的算子 F，由定理 2 的证明可知 F 是全连续的.

由条件(H5) 可得，存在常数 $p>0$，使得对 $0<|u|<\varepsilon_i(i=1,2,3,4,5)$，其中 $\varepsilon_i>0,i=1,2,\cdots,5$，若

$$
|f(t,u)|\leqslant\varepsilon_1|u|,|I_k(u)|\leqslant\varepsilon_2|u|,|I_k^*(u)|\leqslant\varepsilon_3|u|,|f_1(t,u)|\leqslant\varepsilon_4|u|,|f_2(t,u)|\leqslant\varepsilon_5|u|,
$$

则

$$
\frac{4m+2}{\Gamma(q)}\varepsilon_1+2m\varepsilon_2+2m\varepsilon_3+\frac{a}{\Gamma(\beta+1)}\varepsilon_4+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon_5<1.
$$

令 $\Omega=\{u\in C(J,R),\|u\|\leqslant p\}$，对 $\|u\|=p$，由(9) 式可得：

$$
|Fu(t)|\leqslant\left(\frac{4m+2}{\Gamma(q+1)}\varepsilon_1+2m\varepsilon_2+2m\varepsilon_3+\frac{a}{\Gamma(\beta+1)}\varepsilon_4+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon_5\right)\|u\|\leqslant\|u\|,u\in\Omega.
$$

因此，推出 F 至少有一个不动点，从而系统(1) 至少有一个解. 证毕.

3　举例

例 1　考虑以下具有积分边值条件的脉冲分数阶微分方程：

$$
\begin{cases}
{}^cD_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(t)=\dfrac{1}{15}(t-\dfrac{2}{3})\ln(1+u^2(t)),0<t<1,t\neq\dfrac{2}{3},\\
\Delta u(\dfrac{2}{3})=\dfrac{1}{20}(\dfrac{1}{1-u^2(\frac{2}{3})}),\Delta u'(\dfrac{2}{3})=\dfrac{1}{10}(1+u(\dfrac{2}{3})),\\
u(0)=\dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^{\eta}\dfrac{(\eta-s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{1}{1+s^2}\sin(u(s))\mathrm{d}s,\\
u(1)=\dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^{\sigma}\dfrac{(\sigma-s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{1}{1+s^2}\sin(u(s))\mathrm{d}s.
\end{cases}
\tag{10}
$$

其中 $g(t,u(t))=\dfrac{1}{15}(t-\dfrac{2}{3})\ln(1+u^2(t))$，易知 $L_1=\dfrac{1}{15},L_2=L_3=\dfrac{1}{10},L_4=L_5=\dfrac{1}{2},\alpha=\beta=\dfrac{1}{2},a=b=\dfrac{1}{15},H=\dfrac{4m+2}{\Gamma(q)}L_1+2mL_2+2mL_3+\dfrac{a}{\Gamma(\beta+1)}L_4+\dfrac{b}{\Gamma(\alpha+1)}L_5<1$，

从而定理 1 的所有条件都被满足，于是得到系统(10) 在 J 上有唯一解.

例 2　考虑以下具有积分边值条件的脉冲分数阶微分方程：

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0^+}^{\frac{3}{2}} u(t) = \dfrac{t}{1+t^2}\dfrac{|u(t)|}{1+|u(t)|}, t \in [0,1], t \neq \dfrac{1}{2}, \\ \Delta u(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{|u(t)|}{10+|u(t)|}, \Delta u'(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{2|u(t)|}{10+|u(t)|}, \\ u(0) = \dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{\eta} \dfrac{(\eta - s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{4}{1+s^2}\sin(u(s))\mathrm{d}s, \\ u(1) = \dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{\sigma} \dfrac{(\sigma - s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\dfrac{4}{1+s^2}\sin(u(s))\mathrm{d}s, 0 < \eta, \sigma < 1. \end{cases} \tag{11}$$

经过简单计算,得到 $M_1 = \frac{1}{2}, M_2 = \frac{1}{10}, M_3 = \frac{1}{5}, M_4 = M_5 = 2, \alpha = \beta = \frac{1}{2}, a = b = \frac{1}{30}$,且存在常数 $c_1 = 7.5, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = c_5 = 4$,因此 $c = \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} = 7.5$,从而定理2 的所有条件都被满足,于是得到系统（11）在 J 上有唯一解.

[参考文献]

[1] KILBAS A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional diferential equations [M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.

[2] LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S, VASUNDHARA D J. Theory of fractional dynamic systems [M]. Cambridge: Cambridge Academic Publishers, 2009.

[3] MILLER K, ROSS B. An introduction to the fractional calculus and differential equations [M]. New York: John Wiley, 1993.

[4] AGARWAL R P, BENCHOHRA M, HAMANI S. A survey on existence results for boundary value problem of nonlinear fractional differential equations and inclusions [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2010, 109 (3): 973 – 1033.

[5] WANG J R, LV L, ZHOU Y. Boundary value problem for fractional differential equational involving Caputo dervative in Banach spaces [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2012, 38 (2): 209 – 224.

[6] AHMAD B, NTOUYAS S K, ASSOLAMI A. Caputo type fractional differential equations with nonlocal Riemann-Liouville integral boundary conditions [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2013, 41 (2): 339 – 350.

[7] ZHANG L H, WANG G T. Existence of solution for nonlinear fractional differential equations with impulsives and anti-periodic boundary conditions [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2011, 40 (7): 1 – 11.

[8] BENCHOHRA M, SEBA D. Impulsive fractional differential equation in Banach spaces [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2009, 32 (8): 1 – 14.

[9] WANG G T, ZHANG L H, SONG G X. Systems of first order impulsive functional differential equations with deviating arguments and nonlinear boundary conditions [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2011, 74 (3): 974 – 982.

[10] YANG X J, LI C D, HUANG T W, et al. Mittag-leffler stability analysis of nonlinear fractional-order systems with impulses [J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 293: 416 – 422.

[11] HALE J K. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[12] FEČKAN M, ZHOU Y, WANG J R. On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17 (7): 3050 – 3060.

[13] SMART D R. Fixed-point theorems [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

[14] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.