

# 渐近似—非扩张映射的分裂公共不动点问题

谢芳

(昆明学院 数学系, 云南 昆明 650214)

**摘要:** 设  $H_1, H_2$  是两个实的希尔伯特空间,  $S: H_1 \rightarrow H_1$  和  $T: H_2 \rightarrow H_2$  是两个渐近似—非扩张映射, 在一定条件下, 证明了由(5)式定义的迭代序列弱收敛于它们的分裂公共不动点. 得到的结果推广和改进了 Moudafi(文献[6])的主要结果.

**关键词:** 分裂公共不动点问题; 拟—非扩张映射; 渐近似—非扩张映射; 半闭

**中图分类号:** O177.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-5639(2012)03-0046-05

## The Split Common Fixed-Point Problem for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mapping

XIE Fang

(Department of Mathematics, Kunming University, Yunnan Kunming 650214, China)

**Abstract:** Hypothesis  $H_1, H_2$  are two real Hilbert space,  $S: H_1 \rightarrow H_1$  and  $T: H_2 \rightarrow H_2$  are two asymptotically quasi-nonexpansive mappings. Under certain conditions, we demonstrated that iterative process by (5) weakly converges to split common fixed-point of  $S$  and  $T$ . The result presented in the paper improve and extend some recent results of Moudafi( references[6]).

**Key words:** split common fixed point problem; quasi-nonexpansive mapping; asymptotically quasi-nonexpansive mapping; demicloseness

### 1 预备知识

分裂公共不动点问题是分裂可行性问题和凸可行性问题的一般化. 分裂可行性问题首先是由 Censor 和 Elfving 引入的(见文献[1]), 其用于研究有限维空间制造模型的逆问题. 最近, 分裂可行性问题广泛应用于各学科, 例如图像恢复、计算机断层摄影、辐射源放射疗法等(参见文献[1~5]). 凸可行性问题也是研究真实模型的逆问题. 2011 年 Moudafi 研究了在希尔伯特空间拟—非扩张映射的分裂公共不动点问题(见文献[6]).

分裂公共不动点问题是:

$$\text{求 } x^* \in C \text{ 满足 } Ax^* \in Q, \quad (1)$$

在这里  $H_1, H_2$  是两个实的希尔伯特空间,  $A: H_1 \rightarrow H_2$  是一个有界线性算子,  $S: H_1 \rightarrow H_1$  和  $T: H_2 \rightarrow H_2$  是两个映射, 设  $\text{Fix}S = C, \text{Fix}T = Q$ , 并用

$$\Gamma = \{y \in C; Ay \in Q\}, \quad (2)$$

表示两个映射的分裂公共不动点问题的解集.

本文的目的是在无限维希尔伯特空间引入和研究比拟—非扩张映射更一般的渐近似—非扩张映射的分裂公共不动点问题, 从而推广和改进了 Moudafi(文献[6])的主要结果.

在全文中假设  $H, H_1, H_2$  是 3 个实的希尔伯特空间,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示内积和用  $\|\cdot\|$  表示相对应的范数.

**定义 1**  $T: H \rightarrow H$  是一个映射.

1)  $T$  被称为拟—非扩张的, 如果不动点集  $\text{Fix}(T) = \{x \in H; Tx = x\} \neq \emptyset$ , 对任意的  $(x, q) \in H \times \text{Fix}T$ , 都有不等式

$$\|Tx - q\| \leq \|x - q\| \quad (3)$$

成立;

2)  $T$  被称为渐近似—非扩张的, 如果不动点集  $\text{Fix}(T) = \{x \in H; Tx = x\} \neq \emptyset$ , 有一个序列  $\{t_n\} \subset [1, \infty)$ , 且  $t_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ , 对任意的  $(x, q) \in H \times \text{Fix}T$ , 都有不等式

收稿日期: 2012-04-09

作者简介: 谢芳(1965—), 女, 云南绥江人, 教授, 主要从事非线性分析研究.

$$\|T^n x - q\| \leq t_n \|x - q\| \tag{4}$$

成立.

注:由上面的定义可知每一个为拟一非扩张映射都是渐近拟一非扩张映射.

**定义2** 一个映射  $T$  称为是半闭的,如果对任意的序列  $\{x_n\}$  弱收敛于  $y$ ,且序列  $\{T(x_n)\}$  强收敛于  $z$ ,则有  $Ty = z$  成立.

**算法** 对任意给定的  $x_0 \in H_1$ ,  
迭代序列

$$\begin{cases} u_n = x_n + \gamma\beta A^*(T^n - I)Ax_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n S^n(u_n), \forall n \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

这里  $\beta \in (0,1), \alpha_n \in (0,1)$  和  $\gamma \in (0, \frac{1}{\lambda\beta})$ ,  $A^*$  表示  $A$  的伴随算子,  $\lambda$  是算子  $A^*A$  的谱半径,  $S$  和  $T$  是两个渐近拟一非扩张映射.

我们还将用到下面的引理.

**引理1** 在希尔伯特空间,对任意的  $x, y \in H$  和  $\alpha \in [0,1]$ , 等式:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2$$

成立.

**证明**

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \langle \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha x + (1 - \alpha)y \rangle \\ &= \langle \alpha x, \alpha x \rangle + \langle \alpha x, (1 - \alpha)y \rangle + \langle (1 - \alpha)y, \alpha x \rangle + \langle (1 - \alpha)y, (1 - \alpha)y \rangle \\ &= \alpha^2 \langle x, x \rangle + (1 - \alpha)^2 \langle y, y \rangle + 2\alpha(1 - \alpha) \langle x, y \rangle, \\ \text{右端} &= \alpha \langle x, x \rangle + (1 - \alpha) \langle y, y \rangle - \alpha(1 - \alpha) \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \alpha \langle x, x \rangle + (1 - \alpha) \langle y, y \rangle - \alpha(1 - \alpha) [\langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle] \\ &= \alpha^2 \langle x, x \rangle + (1 - \alpha)^2 \langle y, y \rangle + 2\alpha(1 - \alpha) \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

所以等式

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2$$

成立.

**引理2**<sup>[7]</sup> 设  $\{r_n\}, \{k_n\}$  和  $\{l_n\}$  是3个非负实数序列, 满足条件:

$$r_{n+1} \leq (1 + k_n)r_n + l_n, \forall n \geq n_0,$$

这里  $n_0$  是一个非负整数, 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} l_n < \infty$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$  存在.

**引理3** 设  $T$  是一渐近拟非一扩张映射, 则有下面的不等式成立:

$$\langle x - T^n x, q - T^n x \rangle \leq \frac{1}{2} \|x - T^n x\|^2 + \frac{1}{2} (t_n^2 - 1) \|x - q\|^2, \forall (x, q) \in H \times \text{Fix}T.$$

**证明** 由典型的等式

$$\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2$$

和  $T$  是一个渐近拟一非扩张映射得:

$$\begin{aligned} \langle x - T^n x, q - T^n x \rangle &= -\frac{1}{2} \|x - q\|^2 + \frac{1}{2} \|x - T^n x\|^2 + \frac{1}{2} \|q - T^n x\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \|x - q\|^2 + \frac{1}{2} \|x - T^n x\|^2 + \frac{1}{2} t_n^2 \|x - q\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x - T^n x\|^2 + \frac{1}{2} (t_n^2 - 1) \|x - q\|^2. \end{aligned}$$

## 2 主要结论

下面是著名的 Opial 引理.

**引理4**<sup>[8]</sup> 设  $H$  是一个希尔伯特空间,  $\{x_n\}$  是  $H$  中的序列,  $K$  是  $H$  的非空子集并满足下列条件:

1) 对任意的  $y \in K$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$  存在;

2) 序列  $\{x_n\}$  的弱聚点属于  $K$ .

则存在  $\tilde{x} \in K$  使得  $\{x_n\}$  弱收敛于  $\tilde{x}$ .

**定理 1** 设  $H_1, H_2$  是两个希尔伯特空间,  $A: H_1 \rightarrow H_2$  是一个有界线性算子,  $S: H_1 \rightarrow H_1$  是一个一致  $L$ -李普希兹和渐近拟-非扩张映射且  $\sum_{n=0}^{\infty} (s_n^2 - 1) < \infty$ ,  $T: H_2 \rightarrow H_2$  是一个一致  $\tilde{L}$ -李普希兹和渐近拟-非扩张映射且  $\sum_{n=0}^{\infty} (t_n^2 - 1) < \infty$ . 假设  $S - I$  和  $T - I$  半闭于 0 点. 如果  $\Gamma = \{y \in C; Ay \in Q\} \neq \emptyset$ , 则由(5)式定义的序列  $\{x_n\}$  弱收敛于分裂公共不动点  $x^* \in \Gamma$ .

**证明** 1) 首先证明对任意的  $y \in \Gamma$ , 即  $y \in \text{Fix}S, Ay \in \text{Fix}T$ , 下面的极限存在并且相等. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - y\|.$$

由引理 1 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 &= \|(1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n S^n(u_n) - y\|^2 = \|(1 - \alpha_n)(u_n - y) + \alpha_n(S^n(u_n) - y)\|^2 \\ &= (1 - \alpha_n)\|u_n - y\|^2 + \alpha_n\|S^n(u_n) - y\|^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - y\|^2 + \alpha_n S_n^2 \|u_n - y\|^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2 \\ &= (1 - \alpha_n + \alpha_n S_n^2)\|u_n - y\|^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \|u_n - y\|^2 &= \|x_n + \gamma\beta A^*(T^n - DAx_n - y)\|^2 \\ &= \langle x_n + \gamma\beta A^*(T^n - DAx_n - y), x_n + \gamma\beta A^*(T^n - DAx_n - y) \rangle \\ &= \|x_n - y\|^2 + 2\gamma\beta \langle x_n - y, A^*(T^n - DAx_n) \rangle + \gamma^2 \beta^2 \langle A^*(T^n - DAx_n), A^*(T^n - DAx_n) \rangle \\ &= \|x_n - y\|^2 + 2\gamma\beta \langle x_n - y, A^*(T^n - DAx_n) \rangle + \gamma^2 \beta^2 \langle (T^n - DAx_n), AA^*(T^n - DAx_n) \rangle \\ &= \|x_n - y\|^2 + 2\gamma\beta \langle x_n - y, A^*(T^n - DAx_n) \rangle + \lambda\gamma^2 \beta^2 \langle (T^n - DAx_n), (T^n - DAx_n) \rangle \\ &= \|x_n - y\|^2 + 2\gamma\beta \langle x_n - y, A^*(T^n - DAx_n) \rangle + \lambda\gamma^2 \beta^2 \|(T^n - DAx_n)\|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \theta &:= 2\gamma\beta \langle x_n - y, A^*(T^n - DAx_n) \rangle = 2\gamma\beta \langle A(x_n - y), (T^n - DAx_n) \rangle \\ &= 2\gamma\beta \langle Ax_n - Ay + (T^n - DAx_n) - (T^n - DAx_n), (T^n - DAx_n) \rangle \\ &= 2\gamma\beta [\langle T^n(Ax_n) - Ay, (T^n - DAx_n) \rangle - \|(T^n - DAx_n)\|^2]. \end{aligned}$$

由引理 3

$$\begin{aligned} \langle T^n(Ax_n) - Ay, (T^n - DAx_n) \rangle &= \langle Ax_n - T^n(Ax_n), Ay - T^n(Ax_n) \rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\|Ax_n - T^n(Ax_n)\|^2 + \frac{1}{2}(t_n^2 - 1)\|Ax_n - Ay\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{有 } \theta &\leq 2\gamma\beta \left[ \frac{1}{2}\|Ax_n - T^n(Ax_n)\|^2 + \frac{1}{2}(t_n^2 - 1)\|Ax_n - Ay\|^2 - \|(T^n - DAx_n)\|^2 \right] \\ &= -\gamma\beta \|Ax_n - T^n(Ax_n)\|^2 + \gamma\beta(t_n^2 - 1)\|Ax_n - Ay\|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

这样(7)式变成

$$\begin{aligned} \|u_n - y\|^2 &\leq \|x_n - y\|^2 - \gamma\beta \|Ax_n - T^n(Ax_n)\|^2 + \gamma\beta(t_n^2 - 1)\|Ax_n - Ay\|^2 + \lambda\gamma^2 \beta^2 \|(T^n - DAx_n)\|^2 \\ &= \|x_n - y\|^2 - \gamma\beta(1 - \lambda\gamma\beta)\|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 + \gamma\beta(t_n^2 - 1)\|Ax_n - Ay\|^2, \end{aligned} \quad (9)$$

把(9)式代入(6)式得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 &\leq (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2) \left[ \|x_n - y\|^2 - \gamma\beta(1 - \lambda\gamma\beta)\|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 + \gamma\beta(t_n^2 - 1)\|Ax_n - Ay\|^2 \right] - \\ &\quad \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2 \\ &= (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2) \left[ \|x_n - y\|^2 + \gamma\beta(t_n^2 - 1)\|Ax_n - Ay\|^2 \right] - \\ &\quad (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2)\gamma\beta(1 - \lambda\gamma\beta)\|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2)\|x_n - y\|^2 + \gamma\beta(1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2)(t_n^2 - 1)\|A\|^2\|x_n - y\|^2 - \\ &\quad (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2)\gamma\beta(1 - \lambda\gamma\beta)\|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2 \\ &\leq \left[ (1 + \alpha_n(s_n^2 - 1)) + \gamma\beta(t_n^2 - 1)\|A\|^2 + \gamma\beta\alpha_n\|A\|^2(s_n^2 - 1)(t_n^2 - 1) \right] \|x_n - y\|^2 - \\ &\quad (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2)\gamma\beta(1 - \lambda\gamma\beta)\|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2 \\ &\leq (1 + \delta_n)\|x_n - y\|^2 - (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2)\gamma\beta(1 - \lambda\gamma\beta)\|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 - \\ &\quad \alpha_n(1 - \alpha_n)\|S^n(u_n) - u_n\|^2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{其中 } \delta_n = \alpha_n(s_n^2 - 1) + \gamma\beta(t_n^2 - 1)\|A\|^2 + \gamma\beta\alpha_n\|A\|^2(s_n^2 - 1)(t_n^2 - 1).$$

由(10)式可得

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq (1 + \delta_n) \|x_n - y\|^2.$$

由条件  $\sum_{n=0}^{\infty} (s_n^2 - 1) < \infty$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} (t_n^2 - 1) < \infty$  可得  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < \infty$ . 由引理2 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$  存在.

因此由(10)式和极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$  存在,有

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha_n + \alpha_n s_n^2) \gamma \beta (1 - \lambda \gamma \beta) \|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 + \alpha_n (1 - \alpha_n) \|S^n(u_n) - u_n\|^2 \\ & \leq (1 + \delta_n) \|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2 \rightarrow 0 \text{ (as } n \rightarrow \infty \text{)}. \end{aligned}$$

由条件  $\beta \in (0, 1), \alpha_n \in (0, 1)$  和  $\gamma \in (0, \frac{1}{\lambda \beta})$ , 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n(u_n) - u_n\|^2 = 0 \tag{11}$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(Ax_n) - Ax_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T^n - I)Ax_n\|^2 = 0. \tag{12}$$

由(9)式和(12)式还可推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - y\|.$$

2) 其次证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0$ .

事实上,由(5)式

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|(1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n S^n(u_n) - x_n\| \\ &= \|(1 - \alpha_n)(x_n + \gamma \beta A^*(T^n - I)Ax_n) + \alpha_n S^n(u_n) - x_n\| \\ &= \|(1 - \alpha_n)\gamma \beta A^*(T^n - I)Ax_n + \alpha_n(S^n(u_n) - u_n) + \alpha_n(u_n - x_n)\| \\ &= \|(1 - \alpha_n)\gamma \beta A^*(T^n - I)Ax_n + \alpha_n(S^n(u_n) - u_n) + \alpha_n \gamma \beta A^*(T^n - I)Ax_n\| \\ &= \|\gamma \beta A^*(T^n - I)Ax_n + \alpha_n(S^n(u_n) - u_n)\| \\ &\leq \gamma \beta \|A^*\| \|(T^n - I)Ax_n\| + \alpha_n \|S^n(u_n) - u_n\|. \end{aligned}$$

由(11)和(12)式,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{13}$$

类似地,由(5),(12)和(13)有

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\| &= \|x_{n+1} + \gamma \beta A^*(T^{n+1} - I)Ax_{n+1} - x_n - \gamma \beta A^*(T^n - I)Ax_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \gamma \beta \|A^*\| \|(T^{n+1} - I)Ax_{n+1}\| + \gamma \beta \|A^*\| \|(T^n - I)Ax_n\| \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0. \tag{14}$$

3) 再次证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S(u_n) - u_n\| = 0$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - I)Ax_n\| = 0$ .

事实上,由于  $S$  是一致  $L$ -李普希兹连续的,由(11)和(14)式

$$\begin{aligned} \|S(u_n) - u_n\| &= \|S(u_n) - S^n(u_n) + S^n(u_n) - u_n\| \\ &\leq \|S^n(u_n) - u_n\| + \|S^n(u_n) - S(u_n)\| \\ &\leq \|S^n(u_n) - u_n\| + L \|S^{n-1}(u_n) - u_n\| \\ &\leq \|S^n(u_n) - u_n\| + L \|S^{n-1}(u_n) - S^{n-1}(u_{n-1}) + S^{n-1}(u_{n-1}) - u_n\| \\ &\leq \|S^n(u_n) - u_n\| + L (\|S^{n-1}(u_n) - S^{n-1}(u_{n-1})\| + \|S^{n-1}(u_{n-1}) - u_n\|) \\ &\leq \|S^n(u_n) - u_n\| + L(L \|u_n - u_{n-1}\| + \|S^{n-1}(u_{n-1}) - u_{n-1} + u_{n-1} - u_n\|) \\ &\leq \|S^n(u_n) - u_n\| + L(L \|u_n - u_{n-1}\| + \|S^{n-1}(u_{n-1}) - u_{n-1}\| + \|u_{n-1} - u_n\|) \\ &\leq \|S^n(u_n) - u_n\| + L^2 \|u_n - u_{n-1}\| + L \|S^{n-1}(u_{n-1}) - u_{n-1}\| + L \|u_{n-1} - u_n\| \rightarrow 0 \text{ (as } n \rightarrow \infty \text{)}, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S(u_n) - u_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(S - I)u_n\| = 0. \tag{15}$$

又因为  $T$  是一致  $L$ -李普希兹连续的,用上面同样的方法可以证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - I)Ax_n\| = 0. \tag{16}$$

4) 最后证明序列  $\{x_n\}$  弱收敛于分裂公共不动点  $x^* \in \Gamma$ .

因为极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$  存在,所以序列  $\{x_n\}$  是有界的. 用  $x^*$  表示  $\{x_n\}$  有弱聚点,令  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , 使得

$$\text{弱极限} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_p} = x^*.$$

则由(16)式和  $T - I$  半闭于 0 点得

$$T(Ax^*) = Ax^*,$$

所以

$$Ax^* \in Q.$$

由  $u_n = x_n + \gamma\beta A^*(T^n - I)Ax_n$ , 则有

$$\text{弱极限} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_p} = x^*.$$

再从(15)式和  $S - I$  半闭于 0 点, 推出

$$Sx^* = x^*,$$

其中  $x^* \in C$ , 所以  $x^* \in \Gamma$ .

因为序列  $\{x_n\}$  不再有其它的弱聚点, 由引理 4 得:  $K = \Gamma$ . 所以序列  $\{x_n\}$  弱收敛于分裂公共不动点  $x^* \in \Gamma$ .

从定理 1 直接可得下面的推论.

**推论 1** 设  $H_1, H_2$  是两个希尔伯特空间,  $A: H_1 \rightarrow H_2$  是一个有界线性算子,  $S: H_1 \rightarrow H_1$  是一个拟-非扩张映射,  $T: H_2 \rightarrow H_2$  是一个拟-非扩张映射, 且  $\text{Fix}S = C$  和  $\text{Fix}T = Q$  分别是它们的非空不动点集. 设  $\{x_n\}$  是如下序列  $y$ :

$$\begin{cases} x_0 \in H_1, \\ u_n = x_n + \gamma\beta A^*(T - I)Ax_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n S(u_n), \forall n \geq 1, \end{cases}$$

其中  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\alpha_n \in (0, 1)$  和  $\gamma \in (0, \frac{1}{\lambda\beta})$ ,  $A^*$  表示  $A$  的伴随算子,  $\lambda$  是算子  $A^*A$  的谱半径. 假设  $S - I$  和  $T - I$  半闭于 0 点. 如果  $\Gamma = \{y \in C; Ay \in Q\} \neq \emptyset$ , 则序列  $\{x_n\}$  弱收敛于分裂公共不动点  $x^* \in \Gamma$ .

#### [参考文献]

- [1] CENSOR Y, ELFVING T. A multi-projection algorithm using Bregman projections in a product space[J]. Numer Algorithms, 1994, 8: 221 - 239.
- [2] BYRNE C. Iterative oblique projection onto convex subsets the split feasibility problem[J]. Inverse Problem, 2002, 18: 441 - 453.
- [3] CENSOR Y, BORTFELD T, MARTIN B, et al. A unified approach for inversion problem in intensity-modulated radiation therapy[J]. Phys Med Biol, 2006, 51: 2353 - 2365.
- [4] CENSOR Y, ELFVING T, KOPF N, et al. The multiple-sets split feasibility problem and its applications[J]. Inverse Problem, 2005, 21: 2071 - 2084.
- [5] CENSOR Y, MOTOVA A, SEGAL A. Perturbed projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem[J]. J Math Anal Appl, 2007, 327: 1244 - 1256.
- [6] MOUDAFI A. A note on the split common fixed-point problem for quasi-nonexpansive operators[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74: 4083 - 4087.
- [7] AOYAMA K, KIMURA W, TAKAHASHI W, et al. Approximation of common fixed points of accountable family of nonexpansive mapping on a Banach space[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 67: 2350 - 2360.
- [8] OPIAL Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings[J]. Bull Am Math Soc, 1967, 73: 591 - 597.

