昆明学院学报 2012, 34(6):5~9 CN 53-1211/G4 ISSN 1674-5639
Journal of Kunming University

分数 ID-消去图的邻域并条件

高 炜
（云南师范大学 信息学院，云南 昆明 650092）

摘要： 若删除 G 中任意一个独立集后得到的图依然是分数(g,f,m)-消去图，则称 G 为分数 ID-(g,f,m)-消去图. 将若干个关于分数消去图邻域并条件的结论推广到分数 ID-消去图，证明了如下两个结论：1）阶为 n 的图 G 满足 $n \geq 12k+6m-11$，$\delta(G) \geq \frac{n}{3}+k+m$，且 $|N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{2n}{3}$ 对 G 中任意一对不相邻的顶点 x,y 都成立，则 G 是分数 ID-(k,m)-消去图；2）若 $\delta(G) \geq \frac{an}{2a+b}+\frac{b^2(i-1)}{a}+2m$，$n > \frac{(2a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$，且 $|N_G(x_1) \cup \cdots \cup N_G(x_i)| \geq \frac{(a+b)n}{2a+b}$，对 $V(G)$ 的所有独立集 $\{x_1,\cdots,x_i\}$ 都成立. 则 G 是分数 ID-(g,f,m)-消去图.

关键词： 分数因子；分数消去图；分数 ID-消去图；邻域并
中图分类号： O157. 5 **文献标识码：** A **文章编号：** 1674-5639(2012)06-0005-05

Neighborhood Union Conditions for Fractional ID-Deleted Graph

GAO Wei
(College of Information, Yunnan Normal University, Yunnan Kunming 650092, China)

Abstract: A graph G is called a fractional ID-(g,f,m)-deleted graph, if delete any independent set from G, the resulting graph is still a fractional (g,f,m)-deleted graph. In this paper, we extend some results on neighborhood union conditions for fractional deleted graph to fractional ID-deleted graph. It is determined following two results: 1) If graph G with order n satisfies $n \geq 12k+6m-11$, $\delta(G) \geq \frac{n}{3}+k+m$ and $|N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{2n}{3}$ for any two non-adjacent vertices x,y in G, then G is a fractional ID-(k,m)-deleted graph; 2) If $\delta(G) \geq \frac{an}{2a+b}+\frac{b^2(i-1)}{a}+2m$, $n > \frac{(2a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$, and $|N_G(x_1) \cup \cdots \cup N_G(x_i)| \geq \frac{(a+b)n}{2a+b}$, for any independent set $\{x_1,\cdots,x_i\}$ in $V(G)$, then G is a fractional ID-(g,f,m)-deleted graph.

Key words: fractional factor; fractional deleted graph; fractional ID-deleted graph; neighborhood union

1 预备知识

分数因子理论作为一般因子理论的推广，是分数图论的核心内容之一. 本文的研究对象为无向、简单、有限图. 全文采用文献[1]中标准的图论符号和标记.

设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个图. f 和 g 是定义在顶点集 $V(G)$ 上的两个非负整数值函数，对任意 $x \in V(G)$ 都满足 $g(x) \leq f(x)$. 设 h 是定义在边集 $E(G)$ 上的实值函数，满足对任意 $e \in E(G)$ 有 $0 \leq h(e) \leq 1$ 成立. 令 $E_x=\{e=xy \in E(G)\}$. 如果对所有 $x \in V(G)$ 都有 $g(x) \leq \sum_{e \in Ex} h(e) \leq f(x)$. 那么 h 称为 G 的一个分数(g,f)-示性函数. 取出在函数 h 下不为 0 值的边集合，所构成 G 的一个支撑子图，就是 G 的一个分数(g,f)-因子. 如果对任意 $x \in V(G)$ 都有 $g(x)=f(x)$，那么分数(g,f)-因子可称为分数 f-因子；若 $g(x)=a$，$f(x)=b$ 对任意的 $x \in V(G)$ 成立，则分数(g,f)-因子称为分数$[a,b]$-因子；若 $f(x)=g(x)=k$ 对任意的 $x \in V(G)$ 成立，则分数(g,f)-因子称为分数 k-因子，其中 k 为自然数.

若在 G 中删除任意 m 条边后的图依然有分数(g,f)-因子，则称 G 为分数(g,f,m)-消去图. 若 $g(x)=a$，$f(x)=b$ 对任意的 $x \in V(G)$ 成立，则分数(g,f,m)-消去图称为分数(a,b,m)-消去图；若 $f(x)=g(x)=k$ 对

收稿日期： 2012-09-10
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(60903131)；教育部科学技术研究重点资助项目(210210)；民族教育信息化教育部重点实验室资助项目
作者简介： 高炜(1981—)，男，浙江绍兴人，讲师，博士，主要从事图论及其应用研究.

任意的 $x \in V(G)$ 成立，则分数 (g,f,m)-消去图称为分数 (k,m)-消去图.

文献[2]得到如下 2 个关于分数消去图邻域并的结论.

定理 1[2] 设 $k \geq 2, m \geq 0$ 是 2 个整数. G 是 1 个阶为 n 的图，满足 $n \geq 8k+4m-7$，$\delta(G) \geq k+m$.

若
$$|N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{n}{2}$$
对 G 中任意一对不相邻的顶点 x, y 都成立，则 G 是分数 (k,m)-消去图.

定理 2[2] 设 G 是阶为 n 的图，a, b 是 2 个整数满足 $1 \leq a \leq b$. 设 g, f 是 2 个定义在 $V(G)$ 上的整值函数，满足对所有 $x \in V(G)$ 有 $a \leq g(x) \leq f(x) \leq b$ 成立. $i \geq 2$ 是整数. 若 $\delta(G) \geq \frac{b^2(i-1)}{a} + 2m$，$n > \frac{(a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$，

且
$$|N_G(x_1) \cup \cdots \cup N_G(x_i)| \geq \frac{bn}{a+b}$$
对 $V(G)$ 的所有独立集 $\{x_1, \cdots, x_i\}$ 都成立. 则 G 是分数 (g,f,m)-消去图.

2 分数临界消去图的邻域并条件

若删除 G 中任意一个独立集后得到的图依然是分数 (g,f,m)-消去图，则称 G 为分数 ID-(g,f,m)-消去图. 若对任意的 $x \in V(G)$ 有 $g(x)=a, f(x)=b$，则分数 ID-(g,f,m)-消去图称为分数 ID-(a,b,m)-消去图；若对任意的 $x \in V(G)$ 有 $f(x)=g(x)=k$，则分数 ID-(g,f,m)-消去图称为分数 ID-(k,m)-消去图. 若 $m=0$，则分数 ID-(g,f,m)-消去图、分数 ID-(a,b,m)-消去图、分数 ID-(k,m)-消去图分别称为分数 ID-(g,f,m)-因子临界图、分数 ID-(a,b,m)-因子临界图、分数 ID-(k,m)-因子临界图.

本文的主要结论是将定理 1 和定理 2 推广到分数 ID-消去图的形式，结论如下：

定理 3 设 $k \geq 2, m \geq 0$ 是 2 个整数. G 是 1 个阶为 n 的图，满足 $n \geq 12k+6m-11$，$\delta(G) \geq \frac{n}{3}+k+m$.

若
$$|N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{2n}{3}$$
对 G 中任意一对不相邻的顶点 x, y 都成立，则 G 是分数 ID-(k,m)-消去图.

定理 4 设 G 是阶为 n 的图，a, b 是 2 个整数满足 $1 \leq a \leq b$. 设 g, f 是 2 个定义在 $V(G)$ 上的整值函数，对所有 $x \in V(G)$ 有 $a \leq g(x) \leq f(x) \leq b$ 成立. $i \geq 2, m \geq 0$ 是 2 个整数. 若 $\delta(G) \geq \frac{an}{2a+b} + \frac{b^2(i-1)}{a} + 2m$，$n > \frac{(2a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$，

且
$$|N_G(x_1) \cup \cdots \cup N_G(x_i)| \geq \frac{(a+b)n}{2a+b}$$
对 $V(G)$ 的所有独立集 $\{x_1, \cdots, x_i\}$ 都成立. 则 G 是分数 ID-(g,f,m)-消去图.

在定理 3 中令 $m=0$，可得到如下关于分数 ID-k-因子临界图的邻域并条件.

推论 1 设 $k \geq 2$ 是整数. G 是一个阶为 n 的图，满足 $n \geq 12k-11$，$\delta(G) \geq \frac{n}{3}+k$.

若
$$|N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{2n}{3}$$
对 G 中任意一对不相邻的顶点 x, y 都成立，则 G 是分数 ID-k-因子临界图.

在定理 4 中令 $m=0$，可得到如下关于分数 ID-(g,f)-因子临界图的邻域并条件.

推论 2 设 G 是阶为 n 的图，a, b 是 2 个整数满足 $1 \leq a \leq b$. 设 g, f 是 2 个定义在 $V(G)$ 上的整值函数，对所有 $x \in V(G)$ 有 $a \leq g(x) \leq f(x) \leq b$ 成立. $i \geq 2$ 是整数. 若 $\delta(G) \geq \frac{an}{2a+b} + \frac{b^2(i-1)}{a}$，$n > \frac{(2a+b)[i(a+b)-2]}{a}$，

且
$$|N_G(x_1) \cup \cdots \cup N_G(x_i)| \geq \frac{(a+b)n}{2a+b}$$
对 $V(G)$ 的所有独立集 $\{x_1, \cdots, x_i\}$ 都成立. 则 G 是分数 ID-(g,f)-因子临界图.

定理 3 和定理 4 的证明以及最好性的说明主要用到以下几个引理.

引理 1[3] 设 $k \geq 2, m \geq 0$ 是 2 个整数. 设 G 是 1 个图，H 是 G 中包含 m 条边的子图. 则 G 是分数 (k,m)-消去图. 当且仅当

$$k|S| + \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) - k|T| \geq \sum_{x\in T} d_H(x) - e_G(T,S)$$

对所有 $V(G)$ 的不交子集 S,T 都成立.

引理 2[2]　设 g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的 2 个整值函数,对任意 $x\in V(G)$ 有 $0\leq g(x)\leq f(x)$ 成立. 设 $m\geq 0$ 是整数,G 是 1 个图,H 是 G 中包含 m 条边的子图. 则 G 是分数 (g,f,m)-临界消去图,当且仅当

$$f(S) + \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) - g(T) \geq \sum_{x\in T} d_H(x) - e_G(T,S)$$

对所有 $V(G)$ 的不交子集 S,T 都成立.

引理 3[4]　设 $k\geq 2, m\geq 0$ 为 2 个正整数. G 是阶为 n 的完全图,并满足 $n\geq k+m+1$. 则 G 是分数 (k,m)-消去图.

引理 4　设 G 是阶为 n 的完全图,a,b 是 2 个整数,满足 $1\leq a\leq b$. 设 g,f 是 2 个定义在 $V(G)$ 的整值函数,对所有 $x\in V(G)$ 有 $a\leq g(x)\leq f(x)\leq b$ 成立,$m\geq 0$ 是整数. 若 $n>\dfrac{(a+b)[2(a+b)+2m-2]}{a}$,则 G 是分数 (g,f,m)-消去图.

证明(引理 4)　假设有图 G 满足了引理 4 的所有条件,但不是分数 (g,f,m)-消去图,则由引理 2 和 $\sum_{x\in T} d_H(x) - e_G(T,S)\leq 2m$ 可知,G 满足

$$f(S) + \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) - g(T) \leq 2m-1. \tag{1}$$

选择 S,T 使 $|T|$ 最小,则知 T 中每个顶点 x 都满足 $d_{G-S}(x)\leq b-1$. 否则,若存在 $x\in T$ 满足 $d_{G-S}(x)\geq b$,则 $S,T\backslash\{x\}$ 也满足(1),这与 S,T 的选取矛盾. 由于每个 $S\subseteq V(G)$, $G-S$ 同样也是完全图. 从而对于所有 $V(G)$ 的不交子集 S, T 都有

$$\begin{aligned}
&f(S) + \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) - g(T) - \Big(\sum_{x\in T} d_H(x) - e_G(T,S)\Big)\\
&\geq a|S| + \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) - b|T| - 2m\\
&\geq a|S| - (b-n+|S|+1)(n-|S|) - 2m\\
&= |S|^2 + (a+b-2n+1)|S| - bn + n^2 - n - 2m.
\end{aligned}$$

如果将上式看成关于 $|S|$ 的一元二次函数,那么令上式到达最小的 $|S|$ 为 $\dfrac{2n-a-b-1}{2}$. 同时,由于 $|S|$ 是整数,可得

$$\begin{aligned}
&|S|^2 + (a+b-2n+1)|S| - bn + n^2 - n - 2m\\
&\geq \Big(\frac{2n-a-b-1}{2}\Big)^2 + (a+b-2n+1)\Big(\frac{2n-a-b-1}{2}\Big) - bn + n^2 - n - 2m\\
&= na - \Big(\frac{a+b+1}{2}\Big)^2 - 2m\\
&> \frac{7}{4}a^2 + \frac{7}{4}b^2 + \frac{7}{2}ab - \frac{1}{4} - \frac{5}{2}a - \frac{5}{2}b + (a+b-1)2m > 0,
\end{aligned}$$

这与(1)式矛盾,从而引理 4 成立.

证明(定理 3)　设 I 是 G 中任意一个独立集. 下面考虑 $G'=G-I$. 设 $|V(G')|=n'$.

若 G' 是完全图,则有 $n'\geq\dfrac{2n}{3}\geq 8k+4m-7$(因为 n' 是整数). 则由引理 3 可知,G' 是分数 (k,m)-消去图,从而结论成立. 下面假设 G' 不是完全图.

若 $|I|=1$,则 $n'\geq 12k+6m-12>8k+4m-7$. $\delta(G')\geq\dfrac{n}{3}+k+m-1>k+m$. $|N_{G'}(x)\cup N_{G'}(y)|\geq\dfrac{n'}{2}=\dfrac{n-1}{2}$ 对 G' 中任意两个不相邻顶点 x,y 都成立. 则由定理 1 可知,G' 是分数 (k,m)-消去图,从而结论成立.

若 $|I|\geq 2$,由邻域并条件可得 $n'\geq\dfrac{2n}{3}\geq 8k+4m-7$. 若存在 G' 中两个不相邻的顶点 x,y,使得 $|N_{G'}(x)\cup N_{G'}(y)|<\dfrac{n'}{2}$,则 $\dfrac{2(n'+|I|)}{3}\leq|N_G(x)\cup N_G(y)|<\dfrac{n'}{2}+|I|$,即 $n'<\dfrac{2n}{3}$. 这与条件 $|N_G(x)\cup N_G(y)|\geq\dfrac{2n}{3}$ 和 $|I|\geq 2$ 矛盾. 因此 $|N_{G'}(x)\cup N_{G'}(y)|\geq\dfrac{n'}{2}$ 对 G' 中任意两个不相邻顶点 x,y 都成立.

另外,我们有 $\delta(G')\geq\delta(G)-\dfrac{n}{3}\geq k+m$. 则由定理 1 可知,$G'$ 是分数 (k,m)-消去图,从而结论成立.

综上所述,定理 3 成立.

证明(定理 4) 设 I 是 G 中任意一个独立集. 下面考虑 $G'=G-I$. 设 $|V(G')|=n'$.

若 G' 是完全图,则有 $n'\geq\frac{(a+b)n}{2a+b}>\frac{(a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$. 由引理 4 可知,$G'$是分数$(g,f,m)$-消去图,从而结论成立. 下面假设 G'不是完全图.

若$|I|=1$,则 $n'\geq\frac{(2a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}-1>\frac{(a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$. $\delta(G')\geq\frac{bn}{2a+b}+\frac{b^2(i-1)}{a}+2m-1>\frac{b^2(i-1)}{a}+2m$. $|N_{G'}(x)\cup N_{G'}(y)|\geq\frac{bn'}{a+b}=\frac{b(n-1)}{a+b}$对 G' 中任意两个不相邻顶点 x,y 都成立. 则由定理 2 可知,G'是分数(g,f,m)-消去图,从而结论成立.

若$|I|\geq 2$,由邻域并条件可得 $n'\geq\frac{(a+b)n}{2a+b}>\frac{(a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$. 若存在 G'中两个不相邻的顶点 x,y,使得 $|N_{G'}(x)\cup N_{G'}(y)|<\frac{bn'}{a+b}$,则 $\frac{(a+b)(n'+|I|)}{2a+b}\leq|N_G(x)\cup N_G(y)|<\frac{bn'}{a+b}+|I|$,即$|I|>\frac{an}{2a+b}$. 这与条件 $|N_G(x)\cup N_G(y)|\geq\frac{(a+b)n}{2a+b}$ 和 $|I|\geq 2$ 矛盾. 因此 $|N_{G'}(x)\cup N_{G'}(y)|\geq\frac{bn'}{a+b}$对 G'中任意两个不相邻顶点 x,y 都成立. 另外,我们有 $\delta(G')\geq\delta(G)-\frac{an}{2a+b}\geq\frac{b^2(i-1)}{a}+2m$. 则由定理 2 可知,$G'$ 是分数(g,f,m)-消去图,从而结论成立.

综上所述,定理 4 成立.

下面通过构造一些图来说明定理 3 和定理 4 在一定意义上是最好的.

1)定理 3 中最小度的条件不能换作 $\delta(G)\geq\frac{n}{3}+k+m-1$. 否则,取 n 充分大且可以被 3 整除. 设 G'是这样的图,它由一个孤立点 v 和 $K_{\frac{2n}{3}-1}$ 中的 $k+m-1$ 个顶点相连. 设 $G=G'\vee K_{\frac{n}{3}}$. 令 $I=K_{\frac{n}{3}}$,我们考察 G'是否为分数(k,m)-消去图. 在 G'中删除与 v 相邻的 m 条边. 设最后得到的图为 G'',则有 $d_{G''}(v)=k-1$. 则由分数 k-因子的定义知,G''无分数 k-因子. 因此 G 不是分数 ID-(k,m)-消去图,所以定理 3 中的最小度条件 $\delta(G)\geq\frac{n}{3}+k+m$ 是最好的.

2)设 $G=(4k+2m-4)K_1\vee K_{4k+2m-4}\vee(4k+2m-3)K_1$. 则 $n=12k+6m-11$, $\delta(G)=8k+4m-8>\frac{n}{3}+k+m$,但对任意$(4k+2m-3)K_1$ 中任意两个不相邻顶点 u,v 有 $|N_G(u)\cup N_G(v)|=8k+4m-8<\frac{2n}{3}$. 令 $I=(4k+2m-4)K_1$,考察 $G'=K_{4k+2m-4}\vee(4k+2m-3)K_1$ 是否为分数(k,m)-消去图. 在 G'中令 $S=K_{4k+2m-4}$且 $T=(4k+2m-3)K_1$. 则 $d_{G'-S}(T)=0$ 且 $\sum_{x\in T}d_H(x)-e_{G'}(T,S)=0$. 从而 $k|S|+\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-k|T|-(\sum_{x\in T}d_H(x)-e_{G'}(T,S))=-k<0$. 由引理 1 知,$G'$不是分数$(k,m)$-消去图. 从而 G 不是分数 ID-(k,m)-消去图,即定理 3 中条件 $|N_G(x)\cup N_G(y)|\geq\frac{2n}{3}$ 是紧的.

3)设 $G=(4k+2m-4)K_1\vee K_{4k+2m-6}\vee(2k+m-1)K_2$. 则 $n=12k+6m-12$, $\delta(G)=8k+4m-10>\frac{n}{3}+k+m$. 且对 G 中任意两个不相邻顶点 x,y 有 $|N_G(x)\cup N_G(y)|\geq 8k+4m-8=\frac{2n}{3}$. 令 $I=(4k+2m-4)K_1$,考察 $G'=K_{4k+2m-6}\vee(2k+m-1)K_2$是否为分数$(k,m)$-消去图. 在 G'中设 $S=K_{4k+2m-6}$, $T=(2k+m-1)K_2$, H 是 G'的包含 m 条边的子图满足 $H\subseteq T$. 则 $d_{G'-S}(T)=4k+2m-2$ 且 $\sum_{x\in T}d_H(x)-e_{G'}(T,S)=2m$. 从而 $k|S|+\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-k|T|-(\sum_{x\in T}d_H(x)-e_{G'}(T,S))=-2<0$. 由引理 1 可知 G'不是分数(k,m)-临界消去图. 从而 G 不是分数 ID-(k,m)-消去图,即定理 3 中条件 $n\geq 12k+6m-11$ 是紧的.

4)我们可以通过构造一些图来说明定理 4 中的邻域条件是最好的,不能改为 $|N_G(x_1)\cup\cdots\cup N_G(x_i)|\geq\frac{(a+b)n}{2a+b}-1$. 设 $G=(at+1)K_1\vee K_{bt}\vee(at+1)K_1$. 其中 t 充分大,使其满足 $\delta(G)\geq\frac{an}{2a+b}+\frac{b^2(i-1)}{a}+2m$ 和 $n>\frac{(2a+b)[i(a+b)+2m-2]}{a}$. 则 $n=(2a+b)t+2$ 且对 G 中任意独立集$\{x_1,\cdots,x_i\}$,有

$$\frac{(a+b)n}{2a+b}>|N_G(x_1)\cup\cdots\cup N_G(x_i)|=(a+b)t+1>\frac{(a+b)n}{2a+b}-1,$$

令 $I=(at+1)K_1$,考察 $G'=K_{bt}\vee(at+1)K_1$ 是否为分数(g,f,m)-消去图. 在 G' 中令 $S=K_{bt}$,$T=(at+1)K_1$. 则 $d_{G'-S}(T)=0$ 且 $\sum_{x\in T}d_H(x)-e_{G'}(T,S)=0$. 若 $x\in K_{bt}$,令 $g(x)=f(x)=a$;若 $x\in(at+1)K_1$,令 $g(x)=f(x)=b$. 从而 $f(S)+\sum_{x\in T}d_{G'-S}(x)-g(T)-(\sum_{x\in T}d_H(x)-e_G(T,S))=-b<0$. 由引理 2 知,$G'$ 不是分数(g,f,m)-消去图. 从而 G 不是分数 ID-(g,f,m)-消去图,即定理 4 中邻域并条件在一定程度上是最好的.

在引理 2 中,令 $g(x)=a$,$f(x)=b$,则可得到下列关于一个图是分数(a,b,m)-消去图的充分必要条件.

引理 5　设整数 a,b 满足 $0\le a\le b$. 设 $m\ge0$,$n'\ge0$ 是整数,G 是 1 个图,H 是 G 中包含 m 条边的子图. 则 G 是分数(a,b,m)-消去图,当且仅当

$$b|S|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-a|T|\ge\sum_{x\in T}d_H(x)-e_G(T,S)$$

对所有 $V(G)$ 的不交子集 S,T 都成立.

通过分析文献[2]中定理 2 的证明过程可知,对于定理 4 的完整证明(即不使用定理 2 的证明)可使用反证法. 首先假设删除某个独立集 I 后的图 G 不是分数(g,f,m)-消去图,则 G 满足(1). 选择 S,T 使 $|T|$ 最小,则可知 T 中每个顶点 x 都满足 $d_{G-S}(x)\le b-1$. 设 $d=\min\{d_{G-S}(x):x\in T\}$,则

$$a|S|+d|T|-b|T|\le f(S)+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-g(T)\le 2m-1. \tag{2}$$

而对于分数(a,b,m)-消去图而言,可用同样的方法. 假设删除某个独立集 I 后的图 G 不是分数(a,b,m)-消去图,则 G 满足

$$b|S|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-a|T|\le 2m-1,$$

选择 S,T 使 $|T|$ 最小,则可知 T 中每个顶点 x 都满足 $d_{G-S}(x)\le a-1$. 设 $d=\min\{d_{G-S}(x):x\in T\}$,则

$$b|S|+d|T|-a|T|\le 2m-1. \tag{3}$$

通过比较(2)式和(3)式可知,它们的本质差别在于不等式左边关于 $|S|$ 和 $-|T|$ 的系数 a,b 互换. 再由类似的证明方法,可得到如下关于分数 ID-(a,b,m)-消去图邻域并条件的结论.

定理 5　设 G 是阶为 n 的图,a,b 是 2 个整数满足 $1\le a\le b$. $i\ge2$,$m\ge0$ 是 2 个整数. 若 $\delta(G)\ge\frac{bn}{a+2b}+a(i-1)+2m$,$n>\frac{(a+2b)[i(a+b)+2m-2]}{b}$,

且
$$|N_G(x_1)\cup\cdots\cup N_G(x_i)|\ge\frac{(a+b)n}{a+2b}$$

对 $V(G)$ 的所有独立集 $\{x_1,\cdots,x_i\}$ 都成立. 则 G 是分数 ID-(a,b,m)-消去图.

由关于定理 4 邻域并条件的例子可知,定理 5 中邻域并条件在一定意义上也是最好的. 同时,在定理 5 中令 $m=0$,可以得到如下关于分数 ID-(a,b)-因子临界图的邻域并条件.

推论 3　设 G 是阶为 n 的图,a,b 是 2 个整数满足 $1\le a\le b$. $i\ge2$ 是整数. 若 $\delta(G)\ge\frac{bn}{a+2b}+a(i-1)$,$n>\frac{(a+2b)[i(a+b)-2]}{b}$,

且
$$|N_G(x_1)\cup\cdots\cup N_G(x_i)|\ge\frac{(a+b)n}{a+2b}$$

对 $V(G)$ 的所有独立集 $\{x_1,\cdots,x_i\}$ 都成立. 则 G 是分数 ID-(a,b)-因子临界图.

[参考文献]

[1]BONDY J A,MUTRY U S R. Graph theory[M]. Berlin:Spring,2008:1－40.
[2]高炜. 关于分数消去图的若干结果[D]. 苏州:苏州大学,2012.
[3]ZHOU S. A minimum degree condition of fractional (k,m)-deleted graphs[J]. Comptes Rendus Math,2009,347:1223－1226.
[4]高炜. 独立集可去的分数(k,m)-消去图的最小度条件[J]. 曲靖师范学院学报,2012,31(3):7－9.