

# 对称双弹簧振子横向振动的复杂性研究

何松林, 黄焱, 戴祖诚  
(昆明学院 物理科学与技术系, 云南 昆明 650031)

**摘要:** 利用 MATLAB 数值求解对称双弹簧振子横向振动的微分方程, 程序设计为对任意选取的系统参数和初始条件, 均可绘制出振动曲线和相图. 数值实验表明: 对称双弹簧振子的横向运动是周期振动, 振动特性随初始条件发生改变; 当振幅远大于弹簧原长时, 横向振动趋于简谐振动, 并与纵向振动有相同的周期; 当振幅远小于弹簧原长时, 横向振动趋于立方非线性振动, 其振动周期与振幅成反比.

**关键词:** 对称双弹簧振子; 横向振动; MATLAB; 数值实验

**中图分类号:** O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-5639(2010)03-0086-03

## Study on Complexity of the Transverse Vibration of Symmetric Double-Spring Oscillator

HE Song-lin, HUANG Yan, DAI Zu-cheng

(Physics Science and Technology Department, Kunming University, Yunnan Kunming 650031, China)

**Abstract:** The numerical solution of differential equation of transverse vibration of symmetric double-spring oscillator has been gotten with MATLAB. The vibration curves and phase diagrams could be drawn for arbitrarily selected system parameters and initial conditions with program. It is found that the transverse vibration of symmetric double-spring oscillator is always periodic, and the nature of vibration varies with the initial conditions. If the amplitude is larger than the length of the original spring, the transverse vibration is trending to harmonic oscillation. If the amplitude is smaller than the length of the original spring, the transverse vibration is trending to cubic nonlinear oscillation.

**Key words:** symmetric double-spring oscillator; transverse vibration; MATLAB; numerical experiment

弹簧振子是由质量可以忽略的轻质弹簧和质点构成的系统, 是物理学及工程技术中的重要模型<sup>[1]</sup>. 若在弹性限度内, 回复力与弹簧的形变量成正比, 即满足胡克定律, 系统将作简谐振动. 这种情况下, 系统被称为线性谐振子. 作为复杂振动研究的基础, 谐振子模型在宏观物体及微观粒子(原子、分子)的振动<sup>[2]</sup>研究中, 都发挥了巨大的作用. 如果回复力不满足胡克定律, 如回复力中含有形变量的平方项或立方项, 则系统被称为非线性振子, 其振动是非线性的. 各类振子振动的性质, 长期都是研究的热点<sup>[3-5]</sup>. 本文拟对由 2 个相同的轻质弹簧和 1 个质点构成的对称双弹簧振子的横向运动进行研究, 揭示其振动的复杂性.

### 1 运动微分方程

对称双弹簧振子系统如图 1 所示, 由一端固定的 2 个相同的轻质弹簧连接 1 个质点构成. 设弹簧的原长为  $l$ , 倔强系数为  $k$ , 质点的质量为  $m$ . 以 2 个弹簧无形变时质点的平衡位置为原点, 2 个弹簧的固定点连线为  $x$  轴, 与此垂直的方向为  $y$  轴建立坐标系. 当质点沿  $x$  轴运动时, 称为纵向振动; 当质点

沿  $y$  轴运动时, 称为横向振动.

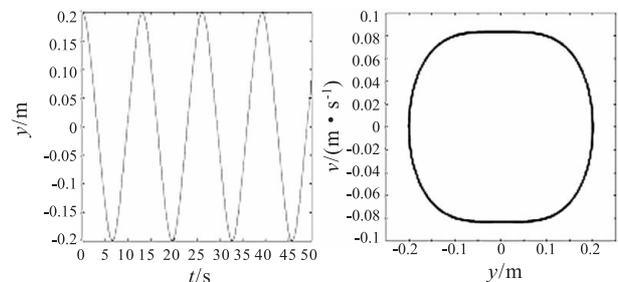


图2 对称双弹簧振子横向振动的振动曲线和相图

设弹簧的弹性回复力遵从胡克定律. 对称双弹簧振子纵向振动时, 若质点的位移为  $x$ , 质点  $m$  所受合力为  $-2kx$ . 由牛顿第二定律得纵向振动微分方程为:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0. \quad (1)$$

(1) 式是圆频率为  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$  的简谐振动微分方程, 说明对称双弹簧振子的纵向振动为简谐振动, 周

收稿日期: 2010-05-17

基金项目: 2009 年云南省教育厅科学研究基金资助项目 (09Y0344)

作者简介: 何松林 (1964—), 男, 云南保山人, 副教授, 理学硕士, 主要从事理论物理及计算机程序设计研究.

期为  $T_0 = \sqrt{\frac{2\pi m}{k}}$ .

对称双弹簧振子横向振动时, 如图1所示, 若质点的位移为  $y$ , 则每根弹簧的伸长量为  $\sqrt{l^2 + y^2} - l$ . 由对称性分析知, 此时质点受到两根弹簧的弹性力在  $x$  方向相互抵消, 所受合力沿  $y$  方向. 由胡克定律知, 质点所受合力为  $-2k(\sqrt{l^2 + y^2} - l)\frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}}$ . 再

由牛顿第二定律得:  $\ddot{y} + \frac{2k}{m}(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}})y = 0$ , 并将

$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$  代入得:

$$\ddot{y} + \omega_0^2(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}})y = 0. \quad (2)$$

(2) 式为对称双弹簧振子横向振动微分方程, 是一个非线性微分方程, 无法求出其精确的解析解. 我们将采用数值实验对其进行分析研究, 得出对称双弹簧振子横向振动的特性.

## 2 算法与程序

众所周知, (1) 式是简谐振动微分方程, 其解为余弦型函数. 简谐振动的相图是椭圆<sup>[6]</sup>, 振动曲线是余弦(正弦)型曲线, 周期为  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ .

那么(2)式表示的横向振动的情况又怎样呢? 采用 MATLAB 进行数值实验. 利用 ode45 函数对(2)式进行四阶龙格-库塔数值求解, 并用绘图函数画出  $v-y$  及  $y-t$  曲线, 得出相图和振动曲线<sup>[7]</sup>. 具体的 MATLAB 程序如下:

### 2.1 待求函数 funvt 文件 funvt.m

依据方程(2), 设计 funvt.m 文件, 用来创建待求函数 funvt, 以便于使用 ode45 进行求解. 代码为:

```
function f = funvt(t,y)
global w0 l;
f = [y(2); -w0^2 * y(1) + w0^2 * y(1) * l/sqrt(y(1)^2 + l^2)];
```

### 2.2 求解 funvt 函数的 m 文件 vto.m

设计可任意改变弹簧原长  $l$ , 纵向振动(系统固有)圆频率  $\omega_0$ , 初位移  $y_0$  和初速度  $v_0$  等参数的求解 funvt 函数的 vto.m 文件, 以便实施数值实验. 程序为:

```
clear;
close all;
global l w0;
l = input('输入弹簧原长 l = ');
w0 = input('输入圆频率 w0 = ');
y0 = input('输入初始位移 y0 = ');
v0 = input('输入初速度 v0 = ');
figure;
[t,y] = ode45('funvt',[0,50],[y0,v0]);
```

```
plot(t,y(:,1)/y0,'-'); % 绘制振动曲线
xlabel('t'), ylabel('y')
pause;
figure;
[t,y] = ode45('funvt',[0,200],[y0,v0]);
plot(y(:,1),y(:,2),'-'); % 绘制相图
xlabel('v'), ylabel('y').
```

## 3 数值实验结果及分析

### 3.1 横向运动是周期振动

执行上述的 vto.m 文件, 当  $l = 0.2 \text{ m}$ ,  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $y_0 = 0.2 \text{ m}$  及  $v_0 = 0$  时得到的振动曲线和相图如图2所示, 振动曲线为等幅振荡曲线, 而相图为封闭曲线. 改变参数, 再进行多次数值实验, 结果发现, 无论怎样改变参数  $l$ ,  $\omega_0$ ,  $y_0$  和  $v_0$ , 得到的振动曲线都是等幅振荡曲线, 相图都是闭合曲线. 这一结果表明, 对称双弹簧振子的横向运动在各种情况下都是周期振动.

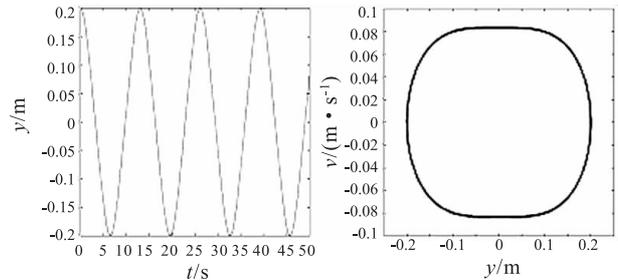


图2 对称双弹簧振子横向振动的振动曲线和相图

### 3.2 当 $|\frac{y_0}{l}|$ 或 $|\frac{v_0}{l}|$ 很大时, 横向运动趋于简谐振动

数值实验发现, 同一个对称双弹簧振子( $l$ ,  $\omega_0$  一定), 当初始条件( $y_0$  和  $v_0$ ) 改变时, 振动性质会发生改变, 这与一般非线性振动的特征是一致的. 数值实验发现, 当  $|\frac{y_0}{l}| \geq 10$  或  $|\frac{v_0}{l}| \geq 10$  时, 横向振动的相图趋于椭圆. 图3中(a)图是  $l = 0.2 \text{ m}$ ,  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $y_0 = 2.0 \text{ m}$  及  $v_0 = 0$  时的相图; 而(b)图是  $l = 0.2 \text{ m}$ ,  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $y_0 = 0.1 \text{ m}$  及  $v_0 = 20.0 \text{ m/s}$  时的相图; 它们的形状都接近椭圆. 这表明当  $|\frac{y_0}{l}|$  或  $|\frac{v_0}{l}|$  很大时, 对称双弹簧振子的横向振动趋于简谐振动.

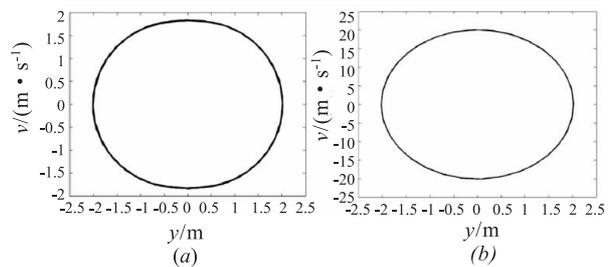


图3  $|\frac{y_0}{l}|$  或  $|\frac{v_0}{l}|$  很大时, 横向振动相图

事实上,当 $|\frac{y_0}{l}|$ 或 $|\frac{v_0}{l}|$ 很大时,将会有 $\frac{y^2}{l^2} \gg 1$ ,

则 $\frac{ly}{\sqrt{l^2+y^2}} \rightarrow 0$ . 在此条件下,(2)式化为 $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ ,

与(1)式相同. 也就是说,当振幅远大于弹簧原长时,对称双弹簧振子的振动可视为简谐振动,并且其周期与纵向振动的周期相同.

### 3.3 当 $|\frac{y_0}{l}| \leq \frac{1}{3}$ 时,横向振动周期与振幅成反比

数值实验发现,同一个对称双弹簧振子( $l, \omega_0$ 一定),当 $|\frac{y_0}{l}| \leq \frac{1}{3}$ 时,其横向振动的周期明显随初始位移 $y_0$ 的增大而减小. 为了得出更明确的关系,将 $y_0$ 取不同值时的 $y/y_0$ 随时间 $t$ 的变化曲线在同一图中显示出来,结果如图4所示. 图中是 $l = 0.2 \text{ m}$ ,  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ 的对称双弹簧振子,在初速度 $v_0 = 0$ 的情况下, $y_0$ 分别取 $y_{01} = 0.02 \text{ m}$ ,  $y_{02} = 0.04 \text{ m}$ 及 $y_{03} = 0.06 \text{ m}$ 时 $y/y_0$ 随时间 $t$ 的变化曲线. 从图中可明显看出,对应于 $y_{01}, y_{02}$ 及 $y_{03}$ 的周期 $T_1, T_2$ 和 $T_3$ 之间存在关系 $\frac{1}{2}T_1 = T_2 = \frac{3}{2}T_3$ . 由于 $y_{01} = \frac{1}{2}y_{02} = \frac{1}{3}y_{03}$ ,则 $T_1 y_{01} = T_2 y_{02} = T_3 y_{03}$ ,或 $T_1 : T_2 : T_3 = \frac{1}{y_{01}} : \frac{1}{y_{02}} : \frac{1}{y_{03}}$ .

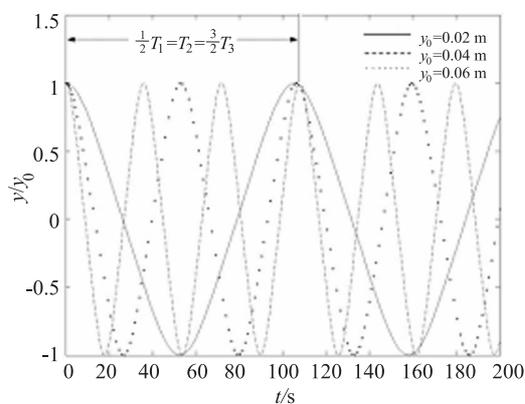


图4  $|\frac{y_0}{l}| \leq \frac{1}{3}$ 时,周期与 $y_0$ 成反比

改变 $l, \omega_0$ ,进一步进行数值实验,得到相同结果. 由于 $v_0 = 0, y_0$ 就是振幅. 由此可总结得出:对称双弹簧振子在 $|\frac{y_0}{l}| \leq \frac{1}{3}$ 的情况下,横向振动的周期与振幅成反比.

在 $v_0 = 0$ 的情况下,如果 $|\frac{y_0}{l}| \ll 1$ ,那么一定有 $\frac{y_0^2}{l^2} \ll 1$ . 将 $\frac{l}{\sqrt{l^2+y^2}} = (1 + \frac{y^2}{l^2})^{-\frac{1}{2}}$ 作二项式展开,并

忽略高阶项得 $\frac{l}{\sqrt{l^2+y^2}} \approx 1 - \frac{y^2}{2l^2}$ . 此时(2)式可化为

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0^2}{2l^2} y^3 = 0. \quad (3)$$

(3)式是立方非线性振动微分方程,许多文献<sup>[8-9]</sup>报道过其周期与振幅成反比. 也就是说,对称双弹簧振子在振幅小于弹簧原长三分之一的情况下,表现出立方非线性振动的特性.

除以上讨论的 $|\frac{y_0}{l}| \geq 10$ 和 $|\frac{y_0}{l}| \leq \frac{1}{3}$ 两种情况外,在振幅处于 $\frac{1}{3} < |\frac{y_0}{l}| < 10$ 的大范围内,横向振动虽然也都是周期振动,但不同振幅时的振动性质差异很大. 振动周期都与初始条件有关,但具体的变化关系无法从数值实验中总结出来,需要更深入的研究.

## 4 结论

通过以上的数值实验,可以得到以下结论:对称双弹簧振子的横向振动是周期振动,振动特性随初始条件发生改变;当振幅远大于弹簧原长时,横向振动趋于简谐振动,并与纵向振动有相同的周期;当振幅远小于弹簧原长时,横向振动趋于立方非线性振动,其振动周期与振幅成反比.

综上所述,通过数值实验分析了对称双弹簧振子横向振动的复杂性,得出有益的结果,丰富了弹簧振子的研究.

### [参考文献]

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程: 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995: 129.
- [2] 吴国祯. 分子高激发振动——非线性和混沌的理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 1.
- [3] 廖旭, 任学藻. 组合线性弹簧振子中的非线性振动[J]. 大学物理, 2008, 27(2): 141-145.
- [4] 戴丽玲. 简支梁固有频率与固有振型的实验室测量与理论分析[J]. 昆明学院学报, 2008, 30(4): 86-89.
- [5] 倪亚贤, 董慎行. 对称非线性弹簧振子的周期特性[J]. 大学物理, 2003, 22(4): 22-24.
- [6] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 22-23.
- [7] 刘惠颖. MATLAB R2007 基础教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [8] 陈海燕.  $X^3$  振荡器的周期的一种计算方法[J]. 大学物理, 1999, 18(3): 25-26.
- [9] 余守宪.  $X^3$  振荡器的周期运动[J]. 大学物理, 2000, 19(1): 19-20.