昆明学院学报　2012, 34(6):18～21　CN 53－1211/G4　ISSN 1674－5639
Journal of Kunming University

M － 矩阵的 Hadamard 积的最小特征值下界的新的估计

蒋建新，李艳艳
（文山学院 数理系，云南 文山 663000）

摘要：研究了 M－矩阵 B 与 M－矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的 Hadamard 积 $B\circ A^{-1}$ 的最小特征值 $q(B\circ A^{-1})$ 的下界问题，得到了新的仅依赖于矩阵元素的改进估计式. 数值算例验证了所得估计式的有效性和优越性.

关键词：M － 矩阵；Hadamard 积；最小特征值；下界；严格对角占优
中图分类号：0151.21　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639(2012)06－0018－04

New Estimation Lower Bounds of the Minimum Eigenvalue of Hadamard Product for M － Matrices

JIANG Jian-xin, LI Yan-yan
(Department of Mathematics and Physics, Wenshan University, Yunnan Wenshan 663000, China)

Abstract: Research lower bounds of the minimum eigenvalue of Hadamard product for M － matrix B and M － matrix A' s inverse A^{-1}, Getting the new one only depends on the matrix elements of the improved estimation. Numerical example verifies the income estimations of effectiveness and superiority.

Key words: M－matrix; Hadamard product; minimum eigenvalue; lower bound; strictly diagonally dominant

矩阵 Hadamard 积远比通常矩阵乘法简单，它出现在周期函数卷积的三角矩阵、积分方程核的积、概率论的特征函数等之中. 近年来，对于 M－矩阵 B 与 M－矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的 Hadamard 积 $B\circ A^{-1}$ 的最小特征值 $q(B\circ A^{-1})$ 问题吸引了许多学者的研究，而且得到了不同类型且各有优缺点的估计式[1-6]. 本文将继续研究该问题，并给出只依赖矩阵 A 与 B 的元素的一些新的改进的估计式.

1　预备知识

$C^{n\times n}$（$R^{n\times n}$）表示 $n\times n$ 复（实）矩阵集，$N=\{1,2,\cdots,n\}$.

$$R_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|,\ C_i=\sum_{k\neq i}|a_{ki}|,\ d_i=\frac{R_i}{|a_{ii}|},\ \hat{c}_i=\frac{C_i}{|a_{ii}|};$$

$$s_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|},\ j\neq i,\ s_i=\max_{j\neq i}\{s_{ij}\},\ i\in N;$$

$$s'_{ij}=\frac{|a_{ij}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{kj}|\hat{c}_k}{|a_{jj}|},\ j\neq i,\ s'_i=\max_{j\neq i}\{s'_{ji}\},\ i\in N;$$

$$r_{li}=\frac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{lk}|},\ l\neq i,\ r_i=\max_{l\neq i}\{r_{li}\},\ i\in N;$$

$$c_{il}=\frac{|a_{il}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{kl}|},\ l\neq i,\ c_i=\max_{l\neq i}\{c_{il}\},\ i\in N;$$

$$m_{ki}=\frac{|a_{ki}|+\sum\limits_{s\neq k,i}|a_{ks}|r_i}{|a_{kk}|},\ k\neq i;\ m'_{ik}=\frac{|a_{ik}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{sk}|c_i}{|a_{kk}|},\ k\neq i;$$

$$v_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|m_{ki}}{|a_{jj}|},\ j\neq i,\ j\in N,\ v_i=\max_{j\neq i}\{v_{ij}\},\ i\in N;$$

收稿日期：2012－09－12
作者简介：蒋建新（1981—），男，甘肃天水人，讲师，硕士，主要从事微分方程理论及其应用研究.

$$v_{ij}^{'} = \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\neq j,i}|a_{kj}|m_{ik}^{'}}{|a_{jj}|}, j \neq i, j \in N, v_i^{'} = \max_{j\neq i}\{v_{ij}^{'}\}, i \in N.$$

定义 1 [1]　记 $Z^{n\times n} = \{A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}: a_{ij} \leq 0, i \neq j; i,j = 1,\cdots,n\}$,则 $Z^{n\times n}$ 中的矩阵 A 为 Z 矩阵(简记为 $A \in Z^{n\times n}$).

定义 2 [1]　设 $A = (a_{ij}) \in Z^{n\times n}$,如果 A 可表示为 $A = \alpha I - P$,其中 $P \geq 0$, $\alpha \geq \rho(P)$,称 A 为 M - 矩阵. 特别,当 $\alpha > \rho(P)$ 时,称 A 为非奇异 M - 矩阵;当 $\alpha = \rho(P)$ 时,称 A 为奇异 M - 矩阵,用 M_n 表示非奇异 M - 矩阵的集合.

定义 3 [1]　由矩阵 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 组成的集合称为 A 的谱,记为 $\sigma(A)$,即 $\sigma(A) = \{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$;记 $q(A) = \min\{\mathrm{Re}(\lambda): \lambda \in \sigma(A)\}$($\mathrm{Re}(\lambda)$ 为 A 的特征值 λ 的实部),称 $q(A)$ 为 A 的最小特征值.

定义 4 [1]　设 $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in C^{m\times n}$,用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 矩阵.

$$A\circ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix},$$

$A\circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard 积.

2　引理

引理 1 [2]　1)设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$. 则

$$|\beta_{ji}| \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|, j \neq i; \tag{1}$$

2)设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是列严格对角占优矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$. 则

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\neq j,i}|a_{kj}|\hat{c}_k}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|, j \neq i. \tag{2}$$

引理 2 [3]　1)设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M - 矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$. 则

$$|\beta_{ji}| \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|, j \neq i; \tag{3}$$

2)设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是列严格对角占优 M - 矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$. 则

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\neq j,i}|a_{kj}|c_i}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|, j \neq i. \tag{4}$$

引理 3 [4]　1)若 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优的 M - 矩阵,则 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 满足

$$|\beta_{ji}| \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|m_{ki}}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|, j \neq i; \tag{5}$$

2)若 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是列严格对角占优的 M - 矩阵,则 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 满足

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\neq j,i}|a_{kj}|m_{ik}^{'}}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|, j \neq i. \tag{6}$$

引理 4 [2]　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是 M - 矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵. 则

1) $\frac{1}{a_{ii}} \leq b_{ii}$, $i \in N$;

2) $\beta_{ii} \geq \frac{1}{1 + \sum_{j\neq i}s_{ji}}$, $i \in N$.

引理 5 [3]　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是 M - 矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵. 则

$$\beta_{ii} \geq \frac{1}{1 + \sum_{j\neq i}m_{ji}}, i \in N.$$

引理 6 [4]　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是 M - 矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵. 则

$$\beta_{ii} \geq \frac{1}{1 + \sum_{j\neq i}v_{ji}}, i \in N.$$

引理 7 [1] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一组正实数. 则 A 的所有特征值包含在复平面 C 的如下区域中：$\cup \{z \in C : |z - a_{ii}| \le x_i \sum_{j\ne i} \frac{1}{x_j} |a_{ji}|, i \in N\}$.

引理 8 [1] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是 M − 矩阵，则存在正对角矩阵 D，使得 $D^{-1}AD$ 是严格对角占优矩阵，也是 M − 矩阵.

引理 9 [1] 设 A^{-1} 是双随机矩阵，则 $Ae = e$，$A^Te = e$，其中 $e = (1, 1, \cdots, 1)^T$.

引理 10 [1] 设 $A, B \in R^{n\times n}$，且 $D \in R^{n\times n}$，$E \in R^{n\times n}$ 是对角矩阵. 则

$$D(A\circ B)E = (DAE)\circ B = (DA)\circ BE = (AE)\circ(DB) = A\circ(DBE).$$

引理 11 [1] 设 A 为 Z 矩阵，则 A 为 M − 矩阵的充要条件是 A 的主子式都是正值.

3 主要结果

定理 1 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$. 则

$$q(B\circ A^{-1}) \ge \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - s_i \sum_{j\ne i} \frac{1}{s_j} |b_{ji}| m_{ji}}{a_{ii}} \right\}. \tag{7}$$

证明 由引理 8 知，对于 M − 矩阵 A 存在正对角矩阵 D 使得

$$q(B\circ A^{-1}) = q(D^{-1}(B\circ A^{-1})D) = q(B\circ (D^{-1}AD)^{-1}).$$

因此，不失一般性，我们假设 A 是严格对角占优矩阵.

1）若 A, B 是不可约的，令 $R_j^d = \sum_{k\ne j} |a_{jk}| d_k$，$j \in N$，则

$$R_j^d \le |a_{ji}| + \sum_{k\ne j,i} |a_{jk}| d_k \le R_j = \sum_{k\ne j} |a_{jk}|.$$

因此，存在实数 $\alpha_{ji}(0 \le \alpha_{ji} \le 1)$，使得 $|a_{ji}| + \sum_{k\ne j,i} |a_{jk}| d_k = \alpha_{ji} R_j + (1 - \alpha_{ji}) R_j^d$.

令 $\alpha_j = \max_{i\ne j} \{\alpha_{ji}\}$，则 $0 < \alpha_j \le 1$（当 $\alpha_j = 0$ 时，A 是可约的矩阵，与 A 不可约相矛盾），且 $s_j = \max_{i\ne j} \{s_{ji}\} = \frac{\alpha_j R_j + (1 - \alpha_j) R_j^d}{a_{jj}}$，$j \in N$.

易知，$0 < s_j \le 1$. 设 $\lambda = q(B\circ A^{-1})$，由引理 7 知，存在 $i_0 (1 \le i_0 \le n)$，使得

$$|\lambda - b_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}| \le s_{i_0} \sum_{j\ne i_0} \frac{1}{s_j} |b_{ji_0}\beta_{ji_0}|.$$

故

$$\begin{aligned}
|\lambda| &\ge b_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0} - s_{i_0} \sum_{j\ne i_0} \frac{1}{s_j} |b_{ji_0}\beta_{ji_0}| \\
&\ge a_{i_0i_0} b_{i_0i_0} - s_{i_0} \sum_{j\ne i_0} \frac{1}{s_j} |b_{ji_0}| \frac{|a_{ji_0}| + \sum_{k\ne j,i_0} |a_{jk}| r_i}{a_{jj}} \beta_{i_0i_0} \\
&= \left(b_{i_0i_0} - s_{i_0} \sum_{j\ne i_0} \frac{1}{s_j} |b_{ji_0}| m_{ji_0} \right) \beta_{i_0i_0} \\
&\ge \left\{ \frac{a_{i_0i_0} - s_{i_0} \sum_{j\ne i_0} \frac{1}{s_j} |b_{ji_0}| m_{ji_0}}{a_{i_0i_0}} \right\} \\
&\ge \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - s_i \sum_{j\ne i} \frac{1}{s_j} |b_{ji}| m_{ji}}{a_{ii}} \right\}.
\end{aligned}$$

2）若 A, B 有一个可约，由文献[5]中定理 2 的证明可知，此时定理也成立.

应用定理 1 与引理 4、引理 5、引理 6 分别可得下列推论.

推论 1 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵，则

$$q(B\circ A^{-1}) \ge \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - s_i \sum_{j\ne i} \frac{1}{s_j} |b_{ji}| m_{ji}}{1 + \sum_{j\ne i} s_{ji}} \right\}. \tag{8}$$

推论 2 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵，则

$$q(B\circ A^{-1}) \ge \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - s_i \sum_{j\ne i} \frac{1}{s_j} |b_{ji}| m_{ji}}{1 + \sum_{j\ne i} m_{ji}} \right\}. \tag{9}$$

推论 3　设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵，则

$$q(B\circ A^{-1}) \geq \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - s_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{s_j} |b_{ji}| m_{ji}}{1 + \sum_{j\neq i} v_{ji}} \right\}. \tag{10}$$

与定理 1 类似,通过对 x 的不同选取可得下面的定理.

定理 2　设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$，则

$$q(B\circ A^{-1}) \geq \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - s_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{s_j} |b_{ji}| v_{ji}}{a_{ii}} \right\}. \tag{11}$$

定理 3　设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$，则

$$q(B\circ A^{-1}) \geq \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - v_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{v_j} |b_{ji}| s_{ji}}{a_{ii}} \right\}. \tag{12}$$

定理 4　设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$，则

$$q(B\circ A^{-1}) \geq \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - v_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{v_j} |b_{ji}| m_{ji}}{a_{ii}} \right\}. \tag{13}$$

定理 5　设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$，则

$$q(B\circ A^{-1}) \geq \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - m_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{m_j} |b_{ji}| s_{ji}}{a_{ii}} \right\}. \tag{14}$$

定理 6　设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n$，且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$，则

$$q(B\circ A^{-1}) \geq \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - m_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{m_j} |b_{ji}| v_{ji}}{a_{ii}} \right\}. \tag{15}$$

类似定理 1 的推论也可得相似的推论.

下面通过一个算例说明在前面的证明中所得的定理的有效性.

例　已知矩阵 A，B，估计 $q(B\circ A^{-1})$ 的下界.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

应用定理 1 得 $q(B\circ A^{-1}) \geq 0.068$；应用定理 2 得 $q(B\circ A^{-1}) \geq 0.1049$；应用定理 3 得 $q(B\circ A^{-1}) \geq 0.068$；应用定理 4 得 $q(B\circ A^{-1}) \geq 0.1118$；应用定理 5 得 $q(B\circ A^{-1}) \geq 0.0598$；应用定理 6 得 $q(B\circ A^{-1}) \geq 0.1953$. 而事实上 $q(B\circ A^{-1}) = 0.2266$.

[参考文献]

[1]陈景良,陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京:清华大学出版社,2000:239 - 276.

[2]高美平. M - 矩阵与其逆的 Hadamard 积的最小特征值下界新的估计式[D]. 昆明:云南大学,2009.

[3]LI Yao-tang, LI Yan-yan. Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432:536 - 545.

[4]VARGA R S. Minimal Gerschgorin sets[J]. Pacific J Math, 1965, 5(2):719 - 729.

[5]李艳艳,李耀堂. 矩阵 Hadamard 积和 Fan 积的特征值界的估计[J]. 云南大学学报:自然科学版,2010,32(2):125 - 129.

[6]FIEDLER M, MARKHAM T L. An inequality for the Hadamard product of an M - matrix and inverse M - matrix[J]. Linear Algebra Appl, 1988, 101:1 - 8.