

Bogoyavlenskii-Kadomtsev-Petviashili 方程的新的显式解

张颖元, 刘希强, 王岗伟

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要:利用直接对称方法,得到了 Bogoyavlenskii-Kadomtsev-Petviashili 方程的对称约化和一些新的显式解,包括三角函数解、周期解等.并根据修正的 CK 直接方法的理论和已知解建立了新旧解之间的关系,由此也可得到原方程的某些新的显式解.

关键词:(KP-B)方程;对称;显式解

中图分类号:0175.29 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-5639(2012)03-0055-05

New Explicit Solutions of the Bogoyavlenskii-Kadomtsev-Petviashili Equation

ZHANG Ying-yuan, LIU Xi-qiang, WANG Gang-wei

(College of Mathematical Science, Liaocheng University, Shandong Liaocheng 252059, China)

Abstract: By applying a direct symmetry method, the symmetry reductions and some new explicit solutions are obtained for the Bogoyavlenskii-Kadomtsev-Petviashili (KP-B) equation, which include trigonometric function solutions, periodic solutions and so on. And by means of the modified CK's direct method, a relationship is constructed between the new solutions and the old ones of the KP-B equation, hence some new explicit solutions of the original equation are also obtained.

Key words: KP-B equation; symmetry; explicit solutions

为了寻找非线性偏微分方程的对称,已经产生了许多有效的方法,例如经典和非经典李群方法,CK 直接方法^[1-2]和相容性方法^[3].而本文则是利用直接对称方法考虑下述(2+1)维 Bogoyavlenskii-Kadomtsev-Petviashili (KP-B)方程^[4]:

$$(4u_{xt} - u_{xxx} + 8u_x u_{xy} + 4u_y u_{xx})_x + u_{yyy} = 0. \quad (1)$$

KP-B 方程是由 Hietarinta 等人通过扩展的 Hirota's formalism 方法引进的^[5].KP-B 方程也是 KP 谱系通过潘勒韦方法和 Lax 对约化得到的.为了求解非线性发展方程的精确解,现在已有研究者提出了许多解决的方法,例如指数函数法^[6]、Darboux 变换法、Backlund 变换法^[7]和截断潘勒韦分析方法^[8].在文献[4]和文献[9]中,该方程的某些显式解,已经通过扩展的 Tanh 方法求出.而文献[10]则找到了方程(1)的有限对称变换群.

本文将利用直接对称方法得到 KP-B 方程的 4 种对称约化方程和新的显式解,并根据已有的群变换建立新旧解之间的关系,进一步推广了文献[10]中相应的结果.

1 KP-B 方程的对称

直接对称方法的目的是寻找偏微分方程的对称.设方程(1)的对称 $\sigma(x, y, t, u)$ 为

$$\sigma = \alpha(x, y, t)u_x + \beta(x, y, t)u_y + \gamma(x, y, t)u_t + \eta(x, y, t)u + \delta(x, y, t), \quad (2)$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta$ 是待定函数,则方程(1)的对称满足的方程为

$$4\sigma_{xt} - \sigma_{xxx} + 12\sigma_{xx}u_{xy} + 12u_{xx}\sigma_{xy} + 8\sigma_x u_{xy} + 8u_x \sigma_{xy} + 4\sigma_y u_{xx} + 4u_y \sigma_{xx} + \sigma_{yyy} = 0. \quad (3)$$

将方程(2)代入方程(3),并要求 $u = u(x, y, t)$ 满足方程(1).求解关于 $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ 和 δ 的超定方程组,可得

$$\alpha = \frac{1}{4}h'(t)x + m(t),$$

$$\beta = \frac{1}{2}h'(t)y + n(t),$$

收稿日期:2012-01-12

基金项目:国家自然科学基金和中国工程物理研究院联合基金资助项目(11076015)

作者简介:张颖元(1986—),女,山东济南人,在读硕士,主要从事微分方程理论及应用研究.

$$\begin{aligned}\gamma &= h(t), \\ \eta &= \frac{1}{4}h'(t), \\ \delta &= -\frac{1}{4}h''(t)xy - m'(t)y - \frac{1}{2}n'(t)x - g(t),\end{aligned}$$

其中 $h(t), m(t), n(t), g(t)$ 是任意的光滑函数.

则 KP - B 方程的对称称为

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(\frac{1}{4}h'(t)x + m(t)\right)u_x + \left(\frac{1}{2}h'(t)y + n(t)\right)u_y + h(t)u_t + \frac{1}{4}h'(t)u - \\ &\quad \frac{1}{4}h''(t)xy - m'(t)y - \frac{1}{2}n'(t)x - g(t).\end{aligned}\quad (4)$$

因此相应的生成元为

$$\begin{aligned}V &= \left(\frac{1}{4}h'(t)x + m(t)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}h'(t)y + n(t)\right)\frac{\partial}{\partial y} + h(t)\frac{\partial}{\partial t} + \\ &\quad \left(-\frac{1}{4}h'(t)u + \frac{1}{4}h''(t)xy + m'(t)y + \frac{1}{2}n'(t)x + g(t)\right)\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}\quad (5)$$

2 KP - B 方程的相似约化和新的精确解

为了得到方程(1)的相似约化和精确解,首先利用求解 $\sigma = 0$ 来求解不变量,然后将不变量代入原方程,则方程的特征方程组为

$$\frac{dx}{\frac{1}{4}h'(t)x + m(t)} = \frac{dy}{\frac{1}{2}h'(t)y + n(t)} = \frac{dt}{h(t)} = \frac{du}{-\frac{1}{4}h'(t)u + \frac{1}{4}h''(t)xy + m'(t)y + \frac{1}{2}n'(t)x + g(t)}.$$

下面讨论以下几种情况.

情况 1 当 $h(t) = 0, m(t) \neq 0, g(t) = 0, n(t) = 0$ 时,函数 u 的表达式为

$$u = \frac{m'(t)}{m(t)}xy + \theta(\xi, \tau), \quad (6)$$

其中 $\xi = y, \tau = t$, 则函数 $\theta(\xi, \tau)$ 满足下述约化方程

$$\theta_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (7)$$

解方程(7)可得

$$\theta(\xi, \tau) = A(\tau)\xi^2 + B(\tau)\xi + C(\tau), \quad (8)$$

其中 $A(\tau), B(\tau), C(\tau)$ 是关于 τ 的函数.

将方程(8)代入方程(6)得到方程(1)的解:

$$u = \frac{m'(t)}{m(t)}xy + A(t)x^2 + B(t)x + C(t), \quad (9)$$

其中 $A(t), B(t), C(t)$ 是关于 t 的任意函数.同时根据文献[10]中得到的结果和修正的 CK 直接方法的定理,利用得到的新解(9)式,建立新旧解之间的关系,可以得到下述新的显式解,进而推广了文献[10]中相应的解.

定理 1 如果 $U = U(\xi_1, \eta_1, T)$ 是 KP - B 方程的解,则下述

$$u = \alpha^*(x, y, t) + \beta^*(x, y, t)U(\xi_1, \eta_1, T),$$

也是方程的解,其中 $x \rightarrow \xi_1, y \rightarrow \eta_1, t \rightarrow T$, 根据文献[10]中(9)式建立的群变换,可以得到

$$\alpha^* = -\frac{1}{4}\frac{xyT_u}{T_r} - \frac{1}{2}\frac{C^2x(\eta_0)_u}{T_i^{1/2}} - \frac{y(\xi_0)_t}{T_i^{1/4}C} + \alpha_0, \beta^* = CT_i^{1/4}.$$

因此可以建立新旧解之间的关系,获得新的显式解:

$$u^* = -\frac{1}{4}\frac{xyT_u}{T_r} - \frac{1}{2}\frac{C^2x(\eta_0)_u}{T_i^{1/2}} - \frac{y(\xi_0)_t}{T_i^{1/4}C} + \alpha_0 + CT_i^{1/4}\left(\frac{m'(t)}{m(t)}\xi_1\eta_1 + A(T)\xi_1^2 + B(T)\xi_1 + C(T)\right),$$

其中 $\xi_1 = CT_i^{1/4}x + \xi_0, \eta_1 = \frac{T_i^{1/2}y}{C^2} + \eta_0, T = T(t), \xi_0$ 和 η_0 是任意常数^[10].

情况 2 当 $h(t) = b_1, m(t) = 0, n(t) = 0, g(t) \neq 0$ 时,函数 u 可以表示为

$$u = \frac{1}{b_1}\int g(t) dt + \theta(\xi, \tau), \quad (10)$$

其中 $\xi = x, \tau = y$, 将方程(10) 代入方程(1), 则函数 $\theta(\xi, \tau)$ 满足下述约化方程

$$8\theta_{\xi}\theta_{\xi\xi\tau} + 12\theta_{\xi\xi}\theta_{\xi\tau} + 4\theta_{\xi\xi\xi}\theta_{\tau} - \theta_{\xi\xi\xi\xi\tau} + \theta_{\tau\tau\tau} = 0. \tag{11}$$

将 $\theta = \theta(z)$ 代入方程(11), 可得下述常微分方程

$$A_1\theta'\theta''' + A_2\theta''\theta'' - A_3\theta^{(5)} + A_4\theta''' = 0, \tag{12}$$

其中 $z = k\xi + l\tau$, k 和 l 是任意常数. $A_1 = A_2 = 12k^3l, A_3 = k^4l, A_4 = l^3$.

利用 $\frac{G'}{G}$ 展开方法^[11] 求解, 通过平衡方程(12) 的最高阶导数项和非线性项, 可获得 $n = 1$, 则方程(12) 满足下述形式的解:

$$\theta = \alpha_1 \frac{G'(z)}{G(z)} + \alpha_0, \alpha_1 \neq 0, \tag{13}$$

其中 $G = G(z)$ 满足二阶线性常微分方程:

$$G''(z) + \lambda G'(z) + \mu G(z) = 0, \tag{14}$$

其中 λ, μ 是任意常数, $\alpha_i (i = 0, 1)$ 是待定常数.

将方程(13) 和(14) 代入方程(12), 并按 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 的次数合并同类项, 令 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 的各次方的系数为零, 得到一组关于 $\alpha_0, \alpha_1, A_1, A_2, A_3, A_4$ 的代数方程组, 求解此代数方程组可得

$$\alpha_1 = \frac{-12A_3}{A_1} = -k, A_4 = A_3\lambda^2 - 4A_3\mu, \tag{15}$$

其中 α_0 是任意常数, $A_1 \neq 0$.

根据方程(10), (13), (15), 可以得到下述3种形式的行波解:

1) 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0$ 时,

$$u_1 = -k \left(\frac{C_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} z + C_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} z}{C_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} z + C_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} z} \right) + \alpha_0 + \frac{1}{b_1} \int g(t) dt; \tag{15a}$$

2) 当 $\lambda^2 - 4\mu < 0$ 时,

$$u_2 = -k \left(\frac{C_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} z - C_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} z}{C_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} z + C_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} z} \right) + \alpha_0 + \frac{1}{b_1} \int g(t) dt; \tag{15b}$$

3) 当 $\lambda^2 - 4\mu = 0$ 时,

$$u_3 = -k \frac{C_2}{C_1 + C_2 z} + \alpha_0 + \frac{1}{b_1} \int g(t) dt. \tag{15c}$$

以上表达式中, $z = kx + ly, C_1$ 和 C_2 是任意常数.

情况3 当 $m(t) = b_1, n(t) = b_2, h(t) = b_3, g(t) = 0$ 时, 解相应的特征方程组可得不变量 ξ, τ 和函数 u 的表达式为:

$$\xi = x - \frac{b_1}{b_3} t, \tau = y - \frac{b_2}{b_3} t, u = \frac{1}{b_3} \int g(t) dt + \theta(\xi, \tau). \tag{16}$$

将方程(16) 代入方程(1), 可得方程(1) 的约化方程为

$$-4b_1\theta_{\xi\xi\xi} - 4b_2\theta_{\xi\xi\tau} + 8b_3\theta_{\xi}\theta_{\xi\xi\tau} + 12b_3\theta_{\xi\xi}\theta_{\xi\tau} + 4b_3\theta_{\xi\xi\xi}\theta_{\tau} - b_3\theta_{\xi\xi\xi\xi\tau} + b_3\theta_{\tau\tau\tau} = 0. \tag{17}$$

令 $\theta(\xi, \tau) = \theta(z)$, 其中 $z = k\xi + l\tau, k$ 和 l 是任意常数. 则方程(17) 被约化为

$$A_1\theta''' + A_2\theta'\theta''' + A_3\theta''^2 - A_4\theta^{(5)} = 0, \tag{18}$$

其中 $A_1 = 4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l, A_2 = -12b_3k^3l, A_3 = -12b_3k^3l, A_4 = -k^4l$. 由平衡方程(18) 中 $\theta^{(5)}$ 和 θ''^2 这两项, 可得 $n = 1$, 因此, 假设方程(17) 有下述形式的解:

$$\theta = \alpha_0 + \alpha_1\phi + \beta_1\phi^{-1}, \tag{19}$$

其中 $\phi(z)$ 满足

$$\phi'(z) = A + \phi^2(z), \tag{20}$$

其中 A 是参数. 将方程(19) 和(20) 代入方程(18), 令关于 ϕ^i 的系数为零, 则得到关于 α_i 和 β_i 的超定方程组, 解这些代数方程组可得到 α_0, α_1 和 β_1 .

$$\alpha_1 = \frac{1}{b_3}k, \beta_1 = -\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{16b_3k^3l}, A = \frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{16k^4l}, \quad (21)$$

其中 α_0 是任意常数.

方程(20) 满足 Riccati 方程, 有下述广义解:

1) 当 $A < 0$ 时, 可以得到方程(18) 的精确解为

$$\theta_1 = \alpha_0 - \frac{1}{4b_3k} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} \tanh\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} z\right) + \frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{64b_3k^5l} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} \coth\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} z\right); \quad (22)$$

2) 当 $A > 0$ 时, 可以得其周期解为

$$\theta_2 = \alpha_0 + \frac{1}{4b_3k} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} \tan\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} z\right) - \frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{64b_3k^5l} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} \cot\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} z\right), \quad (23)$$

其中 $z = k\left(x - \frac{b_1}{b_3}t\right) + l\left(y - \frac{b_2}{b_3}t\right)$.

由方程(16) 和 $\theta_i (i = 1, 2)$, 可以得到原方程(1) 的显式解为

$$u_1 = \frac{1}{b_3} \int g(t) dt + \alpha_0 - \frac{1}{4b_3k} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} \tanh\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} z\right) + \frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{64b_3k^5l} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} \coth\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{l}} z\right), \quad (23a)$$

$$u_2 = \frac{1}{b_3} \int g(t) dt + \alpha_0 + \frac{1}{4b_3k} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} \tan\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} z\right) - \frac{4k^3b_1 - l^3b_3 + 4b_2k^2l}{64b_3k^5l} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} \cot\left(\frac{1}{4k^2} \sqrt{\frac{l^3b_3 - 4k^3b_1 - 4b_2k^2l}{l}} z\right). \quad (23b)$$

情况 4 当 $h(t) = t, m(t) = 0, n(t) = 0, g(t) = 0$ 时, 不变量 ξ, τ 和函数 u 可以表示为

$$\xi = xt^{-\frac{1}{4}}, \tau = yt^{-\frac{1}{2}}, u = \theta(\xi, \tau)t^{-\frac{1}{4}}. \quad (24)$$

将方程(24) 代入方程(1), 可得到方程(1) 的如下约化方程:

$$-\xi \theta_{\xi\xi\xi} - 3\theta_{\xi\xi} - 2\tau \theta_{\xi\xi\tau} + 8\theta_{\xi} \theta_{\xi\xi\tau} + 12\theta_{\xi\xi} \theta_{\xi\tau} + 4\theta_{\xi\xi\xi} \theta_{\tau} - \theta_{\xi\xi\xi\tau} + \theta_{\tau\tau\tau} = 0. \quad (25)$$

假设方程(25) 有如下形式的解:

$$\theta = s_1(\tau)\xi^2 + s_2(\tau)\xi + s_3(\tau), \quad (26)$$

其中 $s_1(\tau), s_2(\tau)$ 和 $s_3(\tau)$ 是待定函数, 将方程(26) 代入方程(25) 解得

$$\theta = p_0(x^2t^{-\frac{1}{2}} + y^3t^{-\frac{3}{2}}) + p_1xt^{-\frac{1}{4}} + p_2, \quad (27)$$

其中 p_0, p_1 和 p_2 都是常数.

利用方程(24) 和(27) 可获得原方程(1) 的解:

$$u = p_0(x^2 + y^3t^{-1})t^{-\frac{3}{4}} + p_1xt^{-\frac{1}{2}} + p_2t^{-\frac{1}{4}}. \quad (28)$$

同理根据修正的 CK 直接方法(定理 1), 建立新旧解之间的关系, 从而获得更广泛的显式解:

$$u^* = -\frac{1}{4} \frac{xyT_u}{T_r} - \frac{1}{2} \frac{C^2x(\eta_0)_u}{T_i^{1/2}} - \frac{y(\xi_0)_l}{T_i^{1/4}C} + \alpha_0 + CT_i^{1/4}(p_0(\xi_1^2 + \eta_1^3T^{-1})T^{-\frac{3}{4}} + p_1\xi_1T^{-\frac{1}{2}} + p_2T^{-\frac{1}{4}}),$$

其中 $\xi_1 = CT_i^{1/4}x + \xi_0, \eta_1 = \frac{T_i^{1/2}y}{C^2} + \eta_0, T = T(t), \xi_0$ 和 η_0 是任意常数.

注 1: 以上结果均由 Maple 检验, 是方程的解.

为了更直观的显示以上精确解的动力学性质, 我们绘制了显式解: (15b) 式和(23a) 式的三维空间波形图(如图 1、图 2 所示). 各解的参数为:

(15b) 式: $k = 1, \alpha_0 = 0, b_1 = 1, \mu = 2, \lambda = 2, C_1 = 1, C_2 = 2, g(t) = \exp(t)$.

$-10 \leq x \leq 10, 0.01 \leq t \leq 0.09$ (如图1).

(23a) 式: $b_1 = 3, b_3 = 1, b_2 = 1, l = 4, k = 1, \alpha_0 = 0, g(t) = \exp(t), \tau = 2\sin(t)$.

$\xi = x(2\cos(t))^{1/2} + \exp(t), -5 \leq x \leq 5, 0.1 \leq t \leq 0.5$ (如图2).

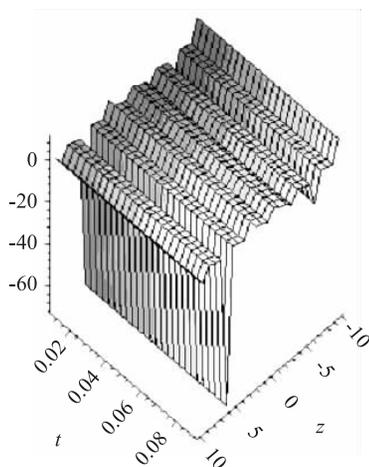


图1 行波解

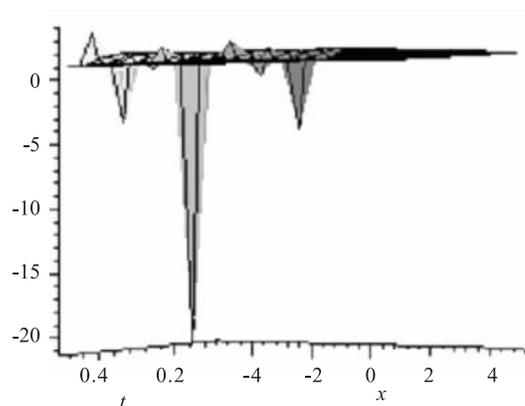


图2 奇异解

3 结论

本文利用对称 $\sigma = 0$ 和方程(1)的相容性,得到了 KP-B 方程的对称和相似约化,利用对称将原来的 $(2+1)$ 维方程约化为 $(1+1)$ 维的偏微分(常微分)方程,并求出了方程的一些新的显式解.建立了新旧解之间的关系,从而推广了文献[10]中相应的结果.

[参考文献]

- [1] YAN Z L, LIU X Q. Symmetry and similarity solutions of variable coefficients generalized Zakharov-Kuznetsov equation[J]. Appl Math Comput, 2006, 180: 288 - 294.
- [2] TIAN Y H, CHEN H L, LIU X Q. A simple direct method to find equivalence transformations of a generalized nonlinear Schrodinger equation and a generalized KdV equation[J]. Appl Math Comput, 2010, 215: 3509 - 3514.
- [3] MOSTAFA F E, AHMAD T A. Nonclassical symmetries for nonlinear partial differential equations via compatibility[J]. Commun Theor Phys, 2011, 56(4): 611 - 616.
- [4] XIE F D, GAO X S. Applications of computer algebra in solving nonlinear evolution equations[J]. Commun Theor Phys, 2004, 41(3): 353 - 356.
- [5] HIETARINTA J, GRAMMATICOS B, RAMANI A. Multilinear operators; the natural extension of Hirota's bilinear formalism[J]. Physics Letters A, 1994, 190(1): 65 - 70.
- [6] ABDOU M A. Generalized solitary and periodic solutions for nonlinear partial differential equations by the Exp-function method[J]. Nonlinear Dyn, 2008, 52: 1 - 9.
- [7] MATVEEV V B, SALLE M A. Darboux transformations and solitons[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [8] CARKSON P A. Painleve equations-nonlinear special functions[J]. Comput Appl Math, 2003, 153: 127 - 140.
- [9] LU Z S, ZHANG H Q. Soliton-like and period form solutions for high dimensional nonlinear evolution equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 17(4): 669 - 673.
- [10] XUAN H N, SUN M M, CHENG G D, et al. Finite symmetry transformation groups and exact solutions of KP-B and BKK equations[J]. Chinese Journal of Electronics, 2011, 20(2): 303 - 306.
- [11] WANG M L, LI X Z, ZHANG J L. The (G'/G) -expansion and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Phys Lett A, 2008, 372: 417 - 423.