昆明学院学报　2021，43（6）：74～77　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

关于双极模糊图圈连通指数的注记

兰美辉[1]，高　炜[2]
（1. 曲靖师范学院 信息工程学院，云南 曲靖 655011；2. 云南师范大学 信息学院，云南 昆明 650500）

摘要：图的拓扑指数计算是化学图论的重要研究内容之一. 近年来，模糊图框架下的拓扑指数逐渐被定义和研究，但缺乏对双极模糊图框架下拓扑指数的扩展. 因此，通过对负极隶属度函数和圈连通性的定义，将文献[1]中提出的模糊图圈连通指数概念扩展到双极模糊图的框架. 同时认为，一些在原来模糊图上得到的关于圈连通指数的性质，可以推广到双极模糊图框架中.

关键词：化学图论；模糊图；双极模糊图；圈连通指数
中图分类号：O159　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639（2021）06－0074－04
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2021.06.011

Remarks on Cyclic Connectivity Index of Bipolar Fuzzy Graphs

LAN Meihui[1]，GAO Wei[2]
（1. School of Information Engineering，Qujing Normal University，Qujing，Yunnan，China　655011；
2. School of Information Science and Technology，Yunnan Normal University，Kunming，Yunnan，China　650500）

Abstract：The calculation of the topological index of graphs is one of the important research contents in chemical graph theory. In recent years，the topological indices under the framework of fuzzy graphs have been gradually defined and studied. However，it lacks the expansion of topological index under the framework of bipolar fuzzy graph. In terms of the definition the negative membership function and cycle connectivity，the concept of cyclic connectivity index of fuzzy graphs proposed in [1] is extended to the setting of bipolar fuzzy graphs. At the same time，some parts of the properties of cyclic connectivity index obtained from the original fuzzy graphs can be extended in bipolar fuzzy graph settings.

Key words：chemical graph theory；fuzzy graph；bipolar fuzzy graph；cyclic connectivity index

在理论化学中，分子图的拓扑指数计算一直是研究的热点问题之一[1－6]. 近年来，拓扑指数的概念被推广到模糊图中，并在理论和应用上取得了一定进展. 而所谓模糊图就是将模糊数据用图结构表示而得到. 具体而言，就是在图中每个顶点附加一个隶属度函数值来刻画其顶点某种模糊特征. 此外，每条边上也给出一个模糊二元关系值来刻画边两端顶点之间的模糊关系. 在化学图论中，当分子结构用图表示后，则顶点和边的模糊值分别刻画原子和对应原子键的某些模糊特征.

用 $\wedge$ 和 $\vee$ 表示最小和最大操作. 模糊图可以用 $G=(V,\sigma,\mu)$ 表示，其中 V 是顶点集，σ 是 V 上的隶属度函数，μ 是 $V\times V$ 上的二元隶属度函数，σ 和 μ 的取值都在0和1之间. 对任意 $x,z\in V$ 都有 $\mu(x,z)\leqslant\sigma(x)\wedge\sigma(z)$ 成立. 另外，如果 xz 在原图中不是一条边，则 $\mu(x,z)=0$. 对于双极模糊图，是将隶属度函数换成刻画正负模糊程度的双极隶属度函数. 具体地说，双极模糊图用 $G=(V,\sigma^P,\sigma^N,\mu^P,\mu^N)$ 来表示，其中 $\sigma^P:V\to[0,1]$ 是 V 上的正极隶属度函数，$\sigma^N:V\to[-1,0]$ 是 V 上的负极隶属度函数，$\mu^P:V\times V\to[0,1]$ 是 $V\times V$ 上的二元正极隶属度函数，$\mu^N:V\times V\to[-1,0]$ 是 $V\times V$ 上的二元负极隶属度函数. 对任意 $x,z\in V$ 都有 $\mu^P(x,z)\leqslant\sigma^P(x)\wedge\sigma^P(z)$ 和 $\mu^N(x,z)\geqslant\sigma^N(x)\vee\sigma^N(z)$ 成立. 另外，如果 xz 在原图中

收稿日期：2021－10－10
基金项目：国家自然科学基金地区基金（11761083）.
作者简介：兰美辉（1982—），女，云南宜良人，讲师，硕士，主要从事数据表示和网络计算研究；高炜（1981—），男，浙江绍兴人，教授，博士，主要从事图论、模糊数学、统计学习理论研究.

不是一条边, 则 $\mu^{P}(x, z) = \mu^{N}(x, z) = 0$.

1　双极模糊图上概念的扩展

双极模糊图中的路径 R 是指顶点序列 $r_0, r_1, \cdots, r_k$, 而这些顶点则两两不同, 并且对 $j = 1, 2, \cdots, k$ 有 $\mu^{P}(r_{j-1}, r_j) > 0$ 或 $\mu^{N}(r_{j-1}, r_j) < 0$ 成立, 其路径长度为 k. 该路径的正负强度分别记为 $S^{P}(R) = \bigwedge_{j=1,\cdots,k} \mu^{P}(r_{j-1}, r_j)$ 和 $S^{N}(R) = \bigvee_{j=1,\cdots,k} \mu^{N}(r_{j-1}, r_j)$. 如果一条路径的两端顶点相同, 即 $r_0 = r_k$, 则称为圈, 此时路径的正负强度即为圈的正负强度. 对于任意 $x, z \in V$, x 和 z 之间的正负连通强度定义为:

$$CONN_{G}^{P}(x, z) = \vee \{S^{P}(R) \mid R = x, \cdots, z\};$$
$$CONN_{G}^{N}(x, z) = \wedge \{S^{N}(R) \mid R = x, \cdots, z\}.$$

若对任意 $x, z \in V$:有 $CONN_{G}^{P}(x, z) > 0$, 则 G 为正连通模糊图; 若 $CONN_{G}^{N}(x, z) < 0$, 则 G 为负连通模糊图. 而 $G - x$ 和 $G - xz$ 的情况可参考文献[7]. 若 $\mu^{P}(x, z) > CONN_{G}^{P}(x, z)$, 则边 xz 称为正 α- 强边; 若 $\mu^{P}(x, z) = CONN_{G}^{P}(x, z)$, 则边 xz 称为正 β- 强边; 若 $\mu^{P}(x, z) < CONN_{G}^{P}(x, z)$, 则边 xz 称为正 δ- 边; 若 $\mu^{N}(x, z) < CONN_{G}^{N}(x, z)$, 则边 xz 称为负 α- 强边; 若 $\mu^{N}(x, z) = CONN_{G}^{N}(x, z)$, 则边 xz 称为负 β- 强边; 若 $\mu^{N}(x, z) > CONN_{G}^{N}(x, z)$, 则边 xz 称为负 δ- 边. 边 xz 称为正强边, 若它是正 α- 强边或正 β- 强边; 边 xz 称为负强边, 若它是负 α- 强边或负 β- 强边. R 称为正强路径, 若它的每一条边都是正强边; R 称为负强路径, 若它的每一条边都是负强边. 若 G 的所有的边都是正强边, 则 G 称为正强双极模糊图; 若 G 的所有的边都是负强边, 则 G 称为负强双极模糊图. 关于双极图模糊桥、模糊割集、模糊树的概念可参考文献[5-6]. 若在 G 中没有割点, 则称为块; 若 $\mu^{P}(x, z) = \sigma^{P}(x) \wedge \sigma^{P}(z)$ 和 $\mu^{N}(x, z) = \sigma^{N}(x) \vee \sigma^{N}(z)$ 对所有 $x, z \in V$ 成立, 则 G 称为完全双极模糊图. 设

$$\theta^{P}(x, z) = \{\eta^{P} \in (0, 1] \mid 存在\, x, z\, 之间的一条圈, 其正强度等于\, \eta^{P}\};$$
$$\theta^{N}(x, z) = \{\eta^{N} \in [-1, 0) \mid 存在\, x, z\, 之间的一个圈, 其负强度等于\, \eta^{N}\}.$$

则 x 和 z 之间的正负圈连通度分别表示为 $C_{x,z}^{P} = \vee \{t \mid t \in \theta^{P}(x, z)\}$ 和 $C_{x,z}^{N} = \wedge \{t \mid t \in \theta^{N}(x, z)\}$. 设 $CC^{P}(G) = \vee \{C_{x,z}^{P} \mid x, z \in V\}$ 和 $CC^{N}(G) = \wedge \{C_{x,z}^{N} \mid x, z \in V\}$. 若 $CC^{P}(G - x) < CC^{P}(G)$, 则 x 是正圈割点; 若 $CC^{P}(G - xz) < CC^{P}(G)$, 则 xz 是正圈桥; 若 $CC^{N}(G - x) > CC^{N}(G)$, 则 x 是负圈割点; 若 $CC^{N}(G - xz) > CC^{N}(G)$, 则 xz 是负圈桥.

双极模糊图的圈连通指数定义为:

$$CCI(G) = (CCI^{P}(G), CCI^{N}(G)) = (\sum_{z, x \in V} \sigma^{P}(x)\sigma^{P}(z)C_{x,z}^{P}, \sum_{z, x \in V} \sigma^{N}(x)\sigma^{N}(z)C_{x,z}^{N}).$$

双极模糊图的平均圈连通指数定义为:

$$\begin{aligned} ACCI(G) &= (ACCI^{P}(G), ACCI^{N}(G)) \\ &= (\frac{1}{\binom{|V|}{2}}\sum_{z, x \in V} \sigma^{P}(x)\sigma^{P}(z)C_{x,z}^{P}, \frac{1}{\binom{|V|}{2}}\sum_{z, x \in V} \sigma^{N}(x)\sigma^{N}(z)C_{x,z}^{N}). \end{aligned}$$

由定义直接可以得到 $0 \leqslant ACCI^{P}(G) \leqslant 1$ 和 $-1 \leqslant ACCI^{N}(G) \leqslant 0$. 设 x 是双极模糊图的顶点, 若 $ACCI^{P}(G) < ACCI^{P}(G - x)$ 且 $ACCI^{N}(G) > ACCI^{N}(G - x)$, 则 x 称为圈连通增强顶点; 若 $ACCI^{P}(G) = ACCI^{P}(G - x)$ 且 $ACCI^{N}(G) = ACCI^{N}(G - x)$, 则 x 称为圈连通中性顶点; 若 $ACCI^{P}(G) > ACCI^{P}(G - x)$ 且 $ACCI^{N}(G) < ACCI^{N}(G - x)$, 则 x 称为圈连通减弱顶点.

2　扩展的性质

本节我们根据文献[1] 给出的一般模糊图圈连通指数的特征, 得到对应的双极模糊图圈连通指数的性质. 这些结果的证明可以通过模仿文献[1] 的证明思路和方法得到, 此处不再给出具体证明过程, 直接列出结果.

性质 2.1 若双极模糊图每个顶点的隶属度函数值均为(ζ^P, ζ^N)，且每条边的隶属度函数值都是(ζ^P, ζ^N)，则 $CCI(G) = (\binom{|V|}{2}(\zeta^P)^2\zeta^P, \binom{|V|}{2}(\zeta^N)^2\zeta^N)$.

性质 2.2 对任意双极模糊图 G，有 $0 \leqslant CCI^P(G) \leqslant \binom{|V|}{2}$和 $-\binom{|V|}{2} \leqslant CCI^N(G) \leqslant 0$ 成立.

设 H 是双极模糊图 G 的部分模糊子图. 一般来说，$CCI^P(H) \leqslant CCI^P(G)$ 和 $CCI^N(H) \geqslant CCI^N(G)$ 不一定成立. 但对于特殊双极模糊图，有如下结果.

性质 2.3 若 H 是正强双极模糊图 G 的部分模糊子图，则 $CCI^P(H) \leqslant CCI^P(G)$；若 H 是负强双极模糊图 G 的部分模糊子图，则 $CCI^N(H) \geqslant CCI^N(G)$.

性质 2.4 $CCI^P(G) = 0$ 当且仅当 G 是正双极模糊树；$CCI^N(G) = 0$ 当且仅当 G 是负双极模糊树.

性质 2.5 若 x 是正圈割点，则 $CCI^P(G - x) < CCI^P(G)$；若 x 是负圈割点，则 $CCI^N(G - x) > CCI^N(G)$.

性质 2.6 同构的双极模糊图有相同的圈连通指数.

性质 2.7 设双极模糊图 $G = (V, \sigma^P, \sigma^N, \mu^P, \mu^N)$ 是块，且对每个顶点 x 有 $\sigma^P(x) = 1$ 和 $\sigma^N(x) = -1$. 设 A^P 和 A^N 分别是正 α- 强边集合和负 α- 强边集合. 则有

$$CCI^P(G) < \sum_{(u,v) \in A^P} \mu^P(u, v) + \sum_{(u,v) \notin A^P} CONN_G^P(u, v);$$
$$CCI^N(G) > \sum_{(u,v) \in A^N} \mu^N(u, v) + \sum_{(u,v) \notin A^N} CONN_G^N(u, v).$$

性质 2.8 设 G 是 $k(\geqslant 3)$ 个顶点的完全双极模糊图，$\sigma^P(v_r) = p_r^P$, $\sigma^N(v_r) = p_r^N$，其中 $r = 1, \cdots, k$，且满足 $p_1^P \leqslant p_2^P \leqslant \cdots \leqslant p_k^P$ 和 $p_1^N \geqslant p_2^N \geqslant \cdots \geqslant p_k^N$. 则有

$$CCI^P(G) = \sum_{i=1}^{k-2} (p_i^P)^2 \sum_{j=i+1}^{k} p_j^P + p_k^P p_{k-1}^P p_{k-2}^P;$$
$$CCI^N(G) = \sum_{i=1}^{k-2} (p_i^N)^2 \sum_{j=i+1}^{k} p_j^N + p_k^N p_{k-1}^N p_{k-2}^N.$$

由于对任意 $u, v \in V$，有 $CONN_G^P(u, v) \geqslant C_{u,v}^P$ 和 $CONN_G^N(u, v) \leqslant C_{u,v}^N$ 成立. 因此对于连通双极模糊图，有 $CI^P(G) \geqslant CCI^P(G)$ 和 $CI^N(G) \leqslant CCI^N(G)$ 成立. 而对于完全双极模糊图，有如下结果.

性质 2.9 设 G 是 $k(\geqslant 3)$ 个顶点的完全双极模糊图，$\sigma^P(v_r) = p_r^P$, $\sigma^N(v_r) = p_r^N$，其中 $r = 1, \cdots, k$，且满足 $p_1^P \leqslant p_2^P \leqslant \cdots \leqslant p_k^P$ 和 $p_1^N \geqslant p_2^N \geqslant \cdots \geqslant p_k^N$. 则 $CI^P(G) = CCI^P(G)$ 当且仅当 $p_{k-1}^P = p_{k-2}^P$, $CI^N(G) = CCI^N(G)$ 当且仅当 $p_{k-1}^N = p_{k-2}^N$.

性质 2.10 若设 G 是 $k(\geqslant 3)$ 个顶点的完全双极模糊图，$x \in V$. 设 $a = \dfrac{CI^P(G)}{CI^P(G - x)}$ 和 $b = \dfrac{CI^N(G)}{CI^N(G - x)}$. 则

· x 是圈连通增强顶点当且仅当 $a < \dfrac{n}{n-2}$ 且 $b > \dfrac{n}{n-2}$;

· x 是圈连通减弱顶点当且仅当 $a > \dfrac{n}{n-2}$ 且 $b < \dfrac{n}{n-2}$;

· x 是圈连通中性顶点当且仅当 $a = \dfrac{n}{n-2}$ 且 $b = \dfrac{n}{n-2}$.

3 小结

模糊数学是刻画和处理不确定性数据的工具，而模糊图则用来描述结构化不确定性数据. 分子图是用图模型来刻画化合物的分子结构，而当分子结构中存在某种不确定性时，该分子图即可表示为模糊图. 因此，本文通过对负极隶属度函数和负极圈连通性的定义，将圈连通指数扩展到双极模糊图，并将原有单极模糊图上的理论结果扩展到对应的双极模糊图. `

［参考文献］

［1］BINU M，MATHEW S，MORDESON J N. Cyclic connectivity index of fuzzy graphs［J］. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2021，29（6）：1340－1349.

［2］AROCKIARAJ M，KAVITHA S R J，BALASUBRAMANIAN K，et al. Topological characterization of coronoid polycyclic aromatic hydrocarbons［J］. Polycyclic Aromatic Compounds，2020，40（3）：784－802.

［3］AROCKIARAJ M，CLEMENT J，BALASUBRAMANIAN K. Topological properties of carbon nanocones［J］. Polycyclic Aromatic Compounds，2020，40（5）：1332－1346.

［4］DOBROWOLSKI J C. The structural formula version of graph theory［J］. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry，2019，81：527－555.

［5］POULIK S，GHORAI G. Certain indices of graphs under bipolar fuzzy environment with applications［J］. Soft Computing，2020，24：5119－5131.

［6］POULIK S，GHORAI G. Detour *g*-interior nodes and detour *g*-boundary nodes in bipolar fuzzy graph with applications［J］. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics，2020，49（1）：106－119.

［7］BINU M，MATHEW S，MORDESON J N. Connectivity index of a fuzzy graph and its application to human trafficking［J］. Fuzzy Sets and Systems，2019，360：117－136.

（上接第 55 页）

［5］张家春，周颖，李朝桢，等. 乌王茶不同叶片外观表现型与季节下茶叶产量与品质研究［J］. 四川农业大学学报，2021，39（1）：35－40.

［6］谭晓琴，李伟，王聪明，等. 紫嫣和紫娟茶树花青素及主要生化成分季节性的变化［J］. 热带作物学报，2021，42（1）：168－174.

［7］宋加艳，何加兴，欧伊伶，等. 碧香早夏季鲜叶加工乌龙茶过程中品质成分动态变化［J］. 现代食品科技，2021，37（2）：238－248.

［8］周喆，孙威江，唐秀华，等. 紫芽茶树不同季节主要生化成分变化分析［J］. 热带作物学报，2018，39（5）：888－893.

［9］WICHE O，HEILMEIER H. Germanium（Ge）and rare earth element（REE）accumulation in selected energy crops cultivated on two different soils［J］. Miner Eng，2016，92：208－215.

［10］王学锋，许春雪，顾雪，等. 典型稀土矿区周边土壤中稀土元素含量及赋存形态研究［J］. 岩矿测试，2019，38（2）：137－146.

［11］金姝兰，黄益宗，胡莹，等. 江西典型稀土矿区土壤和农作物中稀土元素含量及其健康风险评价［J］. 环境科学学报，2014，34（12）：3084－3093.

［12］谢佳，李娟，严晶，等. 冬春两季大叶种茶叶中稀土元素的含量差异［J］. 昆明学院学报，2020，42（6）：40－43.

［13］冉登培. 贵州地区茶叶微量元素分析及稀土影响因素探究［D］. 重庆：西南大学，2014.

［14］黄华斌，于瑞莲，卞凯，等. 铁观音茶园土壤－茶叶中稀土元素的地球化学特征［J］. 稀土，2018，39（2）：141－147.

［15］谢佳，阮亚男，李秋桦，等. 云南临沧大叶种茶树不同组织中稀土元素的含量分布特征［J］. 昆明学院学报，2020，42（3）：32－36.

［16］林锻炼. 福建乌龙茶茶园土壤与茶叶中稀土含量及其相关性［J］. 中国茶叶，2011，33（10）：22－24.