昆明学院学报　2020, 42（6）: 84 ~ 87　ISSN 1674 – 5639　CN 53 – 1211/G4
Journal of Kunming University

特殊框架下分数(k, m)-一致图的联结数条件研究

高　炜
（云南师范大学 信息学院，云南 昆明 650500）

摘要:计算机网络中数据传输的可行性可以用特殊条件下分数因子的存在性来衡量. 而分数(k, m)-一致图是分数(k, m)-消去图和分数(k, m)-覆盖图的组合. 即如果对于任意m条边的子图H,同时存在一个分数k-因子不包含H和另外一个分数k-因子,使得对任意$e\in H$有$h(e)=1$,则称为分数(k, m)-一致图. 此外,联结数是计算机网络的重要参数,用来衡量网络的稳定性和易受攻击性. 因此,通过对联结数和分数(k, m)-一致图的联系研究,给出了特定框架下分数(k, m)-一致图的联结数条件.

关键词:图; 分数因子; 联结数; 分数(k, m)-一致图
中图分类号:O157. 5　**文献标识码**:A　**文章编号**:1674 – 5639(2020)06 – 0084 – 04
DOI:10. 14091/j. cnki. kmxyxb. 2020. 06. 018

Research on Binding Number of Fractional (k, m)-Uniform Graphs in Special Setting

GAO Wei
(College of Information Science and Technology, Yunnan Normal University, Kunming, Yunnan, China　650500)

Abstract: The feasibility of data transmission in computer networks can be measured by the existence of fractional factors under special conditions. The fractional (k, m)-uniform graph can be regarded as a combination of fractional (k, m)-deleted graph and fractional (k, m)-covered graph. A graph is called a fractional (k, m)-uniform graph if any subgraph H with m edges, with a fractional k-factor that doesn't contain H and another fractional k-factor satisfies $h(e)=1$ for any $e\in H$. Furthermore, the binding number is an important parameter of the computer network to measure the stability and vulnerability of the network. So, studying the relationship between the binding number and the fractional (k, m)-uniform graphs, the binding number condition of fractional (k, m)-uniform graphs in a specific setting is given.

Key words: graph; fractional factor; binding number; fractional (k, m)-uniform graph

在计算机传输网络中，由于受单个通道容量的限制而无法传输大数据包. 因此，一般需要将数据进行切割，分成若干个小块再由各个通道分别传输，最后在目的地节点进行数据的重新组装. 然而，在理论上对网络数据传输问题进行数学建模，用顶点代表节点，用边代表两个节点之间有直接的数据传输通道相连. 由此，整个传输网络用一个图来表示，而数据传输问题则等价为图上的分数流问题. 于是就可用分数因子的存在性来间接刻画网络中数据传输的可行性. 有关这方面的研究成果可参阅文献[1—4].

而由于本文只考虑有限无环无重边的无向图，也就是说,假设两节点之间数据传输是双向的. 设$G=(V(G), E(G))$是一个图，其中$V(G)$和$E(G)$分别为顶点集和边集. 对任意顶点子集S，设$G[S]$是S的导出子图，$d_S(x)$和$N_S(x)$分别表示顶点x在$G[S]$中的度和邻域集. 设$\delta(G)=\min\{d(x): x\in V(G)\}$为图$G$的最小图. 对于$G$的不相交子集$S$, T, 设$e_G(S, T)$为一端在S，而另一端在T的边的数量. 设H为边集合，$e_H(S, T)$表示一端在S，另一端在T，且属于集合H的边的数量. 并设$n=|V(G)|$表示图的阶.

设$k\in\mathbb{N}$, $h: E(G)\to[0, 1]$给每条边分配0和1之间的一个实数. 若$\sum\limits_{e\sim x}h(e)=k$对任意$x\in V(G)$成立

收稿日期：2019 – 11 – 12
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11761083）.
作者简介：高炜（1981—），男，浙江绍兴人，教授，博士，主要从事图论、人工智能和统计学习理论研究.

(其中 $e \sim x$ 表示边 e 和顶点 x 相关联),则 $G[F_h]$ 称为图 G 的分数 k-因子,其中 $F_h = \{e \in E(G): h(e) > 0\}$. 若删除 G 的任意 m 条边,其剩余子图依然存在分数 k-因子,则称 G 为分数(k, m)-消去图. 若对 G 中任意含有 m 条边的边集合 H,都存在一个分数 k-因子,使得对任意 $e \in H$ 都有 $h(e) = 1$,则称图 G 为分数(k, m)-覆盖图. 对于覆盖图和消去图相对应,指的是对任意 m 条边的边集合 H,都存在分数 k-因子包含着 H. 若 G 既是分数(k, m)-消去图又是分数(k, m)-覆盖图,则称 G 是分数(k, m)-一致图. 换言之,分数(k, m)-一致图是指,对应任意 m 条边的边集合 H,即存在分数 k-因子不包含 H,又存在分数 k-因子包含 H.

特别地,在上述定义中取 $m = 1$,则分数(k, m)-消去图、分数(k, m)-覆盖图和分数(k, m)-一致图分别为分数 k-消去图、分数 k-覆盖图和分数 k-一致图.

设 $X \subseteq V(G)$,令 $N_G(X) = \bigcup_{x \in X} N_G(x)$ 表示 X 在 G 中的邻域集. 图 G 的联结数定义为:

$$\mathrm{bind}(G) = \min\left\{\frac{|N_G(X)|}{|X|} \mid \phi \neq X \subseteq V(G),\ N_G(X) \neq V(G)\right\},$$

而联结数是图网络的重要指标,用于衡量网络的稳定性和易受攻击程度.

本文的主要目的是研究联结数和分数 k-因子存在性的联系,我们将分别给出分数(k, m)-覆盖图的联结数条件,进而得到分数(k, m)-一致图的条件.

1　主要结果

本文的主要结论陈述如下.

定理 1　设 $k \geqslant 2$ 为奇数,m 为非负整数且满足 $k + 1 \geqslant 2m$. 设 G 是阶为 n 的图且满足 $n > 4k + 1 - 4\sqrt{k + 1 - 2m}$. 若 $\mathrm{bind}(G) > \dfrac{(2k - 1)(n - 1)}{k(n - 2) - 2m + 2}$,则 G 是分数(k, m)-一致图.

定理 2　设 $k \geqslant 2$ 为偶数,m 为非负整数且满足 $k + 2 \geqslant 2m$. 设 G 是阶为 n 的图且满足 $n > 4k + 1 - 4\sqrt{k + 2 - 2m}$. 若 $\mathrm{bind}(G) > \dfrac{(2k - 1)(n - 1)}{k(n - 2) - 2m + 3}$,则 G 是分数(k, m)-一致图.

定理 1 和定理 2 的证明主要通过以下引理的证明来完成.

引理 1　设 $k \geqslant 2$ 为奇数,m 为非负整数且满足 $k + 1 \geqslant 2m$. 设 G 是阶为 n 的图且满足 $n > 4k + 1 - 4\sqrt{k + 1 - 2m}$. 若 $\mathrm{bind}(G) > \dfrac{(2k - 1)(n - 1)}{k(n - 2) - 2m + 2}$,则 G 是分数(k, m)-覆盖图.

引理 2　设 $k \geqslant 2$ 为偶数,m 为非负整数且满足 $k + 2 \geqslant 2m$. 设 G 是阶为 n 的图且满足 $n > 4k + 1 - 4\sqrt{k + 2 - 2m}$. 若 $\mathrm{bind}(G) > \dfrac{(2k - 1)(n - 1)}{k(n - 2) - 2m + 3}$,则 G 是分数(k, m)-覆盖图.

而引理 1 和引理 2 的证明需要如下已知结果的支持.

引理 3　设 $k \geqslant 1$,$m \geqslant 0$ 为两个整数. 设 G 是一个图. 则 G 是分数(k, m)-覆盖图当且仅当对任意含有 m 条边的子图 H 和任意 $S \subseteq V(G)$ 有

$$k \mid S \mid + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) - k \mid T \mid \geqslant \sum_{x \in S} d_H(x) - e_H(S, T), \tag{1}$$

其中 $T = \{x: x \in V(G) - S,\ d_{G-S}(x) \leqslant k - 1\}$.

引理 4[5]　设 a, b, c, m 均为非负整数且满足 $a \geqslant 2$, $2 \leqslant b \leqslant a - 1$, $c \in \{0, 1, \cdots, 2m - 1\}$ 且 $c \leqslant a$. 设 x 和 y 均为非负整数且满足 $\dfrac{(a - b)y + c}{2a - b} \geqslant x$ 和 $\dfrac{(a - 1)y + c}{2a - 1} + 1 - b < x$. 则有 $y \leqslant 4a + 1 - 4\sqrt{a - c}$ 成立.

引理 5[6]　设 G 是阶为 n 的图满足 $\mathrm{bind}(G) > c$,则 $\delta(G) > n - \dfrac{n - 1}{c}$.

2　定理 1 和定理 2 的证明

假设图 G 满足引理 1 或引理 2 的条件,但不是分数(k, m)-覆盖图. 由引理 3 和 $\sum_{x \in S} d_H(x) - e_H(S, T) \leqslant 2m$

可知存在的 $V(G)$ 子集 S 满足:

$$k|S|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-k|T|\leqslant\sum_{x\in S}d_H(x)-e_H(S,T)-1\leqslant 2m-1,$$

其中 $T=\{x:x\in V(G)-S,\ d_{G-S}(x)\leqslant k-1\}$. 显然有 $T\neq\phi$.

设 $d_{\min}=\min\{d_{G-S}(x):x\in T\}$, 则有 $d_{\min}\leqslant k-1$. 利用引理 4 和引理 5, 并且重复文献[5] 中对分数 (k,m)- 消去图的证明过程, 便可得到引理1 和引理2. 同时, 利用文献[5] 中给出的一些反例, 也可以说明引理 1 和引理 2 中对分数(k,m)- 覆盖图的联结数条件是紧的.

最后, 把引理 1 和引理 2 与文献[5] 中的关于分数(k,m)- 消去图的两个结论(该文中的定理 5 和定理 6) 相结合, 即可得到定理 1 和定理 2. 同时, 文献[5] 的一些反例同样可以说明定理 1 和定理 2 中对分数(k,m)- 一致图的联结数条件也是紧的.

3 讨论

本文研究发现, 文献[5] 中关于分数消去图的证明过程, 可以完全用于引理 1 和引理 2 中关于分数(k,m)- 覆盖图的联结数条件的证明. 这让我们自然发出一个疑问:是否所有关于分数(k,m)- 消去图的结果都可以套用到分数(k,m)- 覆盖图, 进而得到分数(k,m)- 一致图的结论?这个问题的答案是否定的.

要解答这个问题, 我们需要从分数(k,m)- 消去图和分数(k,m)- 覆盖图的充要条件入手. 设 $k\geqslant 1$, $m\geqslant 0$ 为两个整数. 设 G 是一个图. 则 G 是分数(k,m)- 消去图当且仅当对任意含有 m 条边的子图 H 和任意 $S\subseteq V(G)$ 有:

$$k|S|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-k|T|\geqslant\sum_{x\in T}d_H(x)-e_H(S,T),\tag{2}$$

其中 $T=\{x:x\in V(G)-S,\ d_{G-S}(x)-d_H(x)+e_H(x,S)\leqslant k\}$(可以直接验证这里的集合 T 可以修改为 $T=\{x:x\in V(G)-S,\ d_{G-S}(x)-d_H(x)+e_H(x,S)\leqslant k-1\}$). 然而, 在处理大部分分数$(k,m)$- 消去图相关问题时, 我们倾向于使用另外一种形式的充分必要条件:G 是分数(k,m)- 消去图当且仅当对任意含有 m 条边的子图 H 和任意不交子集 $S,T\subseteq V(G)$ 有:

$$k|S|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)-k|T|\geqslant\sum_{x\in T}d_H(x)-e_H(S,T).$$

也就是说, 任意 S 和 $T=\{x:x\in V(G)-S,\ d_{G-S}(x)\leqslant k\}$, 与任意不相交的 $S,T\subseteq V(G)$ 是等价的. 显然, 若对任意不相交的 $S,T\subseteq V(G)$, (2) 式成立, 则对于任意 S 和 $T=\{x:x\in V(G)-S,\ d_{G-S}(x)\leqslant k\}$, 不等式(2) 也能成立.

反之, 假设对于任意 S 和 $T=\{x:x\in V(G)-S,\ d_{G-S}(x)\leqslant k\}$, (2) 式成立. 那么对于任意的不相交子集 $S,T\subseteq V(G)$, 把 T 分成两个部分:

$$T_1=\{x\in V(G)-S\mid d_{G-S}(x)-d_H(x)+e_H(x,S)\leqslant k\};$$
$$T_2=\{x\in V(G)-S\mid d_{G-S}(x)-d_H(x)+e_H(x,S)>k\}.$$

对于第 1 部分 T_1, 根据假设条件可得:

$$k|S|+\sum_{x\in T_1}d_{G-S}(x)-k|T_1|\geqslant\sum_{x\in T_1}d_H(x)-e_H(S,T_1).\tag{3}$$

对于第 2 部分 T_2, 由它的定义得:

$$\sum_{x\in T_2}d_{G-S}(x)-k|T_2|>\sum_{x\in T_2}d_H(x)-e_H(S,T_2).\tag{4}$$

于是, 立刻可以用(3) 式和(4) 式, 验证(3) 式 + (4) 式 = (2) 式, 由此可知关于分数(k,m)-消去图, 可以验证不同的充要条件之间的等价性.

回到关于分数(k,m)- 覆盖图的充要条件, 注意到(1) 式和(2) 式之间的唯一区别在于(2) 式中的 $\sum_{x\in T}d_H(x)$ 换成(1) 式中的 $\sum_{x\in S}d_H(x)$. 那么是否还可以推出:G 是分数(k,m)- 覆盖图当且仅当对任意含有 m 条边的子图 H 和任意不交子集 $S,T\subseteq V(G)$, 有(1) 式成立?答案是否定的. 若对任意不交子集 $S,T\subseteq$

$V(G)$,有(1)式成立,该条件为充分条件,但不是必要条件. 假设对于任意 S 和 $T=\{x:x\in V(G)-S, d_{G-S}(x)\leqslant k-1\}$,(1)式成立. 反之,对于任意的不相交子集 S,$T\subseteq V(G)$,这里还是把 T 分成两个部分作类似的分析:

$$T_1=\{x\in V(G)-S\mid d_{G-S}(x)\leqslant k-1\};$$
$$T_2=\{x\in V(G)-S\mid d_{G-S}(x)\geqslant k\}.$$

对于第 1 部分 T_1,根据假设条件可得:

$$k|S|+\sum_{x\in T_1}d_{G-S}(x)-k|T_1|\geqslant\sum_{x\in S}d_H(x)-e_H(S,T_1).\tag{5}$$

对于第 2 部分 T_2,由它的定义得:

$$\sum_{x\in T_2}d_{G-S}(x)-k|T_2|\geqslant 0.\tag{6}$$

通过(5)式+(6)式和(1)式对比,发现缺少 $e_H(S,T_2)$ 项. 由此可知,关于分数(k,m)-覆盖图的充要条件中的任意 S 和 $T=\{x:x\in V(G)-S, d_{G-S}(x)\leqslant k-1\}$ 不能改为任意的不相交子集 S,$T\subseteq V(G)$.

事实上,大部分关于覆盖图的情况需要重新考虑,并不能把消去图的证明过程照搬. 本文的结论只是凑巧,原来的证明过程可以直接拿来用. 由于定理 1 和定理 2 的结论只对小 m 才能满足,即被条件 $k+1\geqslant 2m$ 或 $k+2\geqslant 2m$ 所限制,因此,给出如下的开问题作为本文的结束.

开问题　对于一般的 m,需要什么样的联结数条件才能保证 G 是分数(k,m)-覆盖图和分数(k,m)-一致图?

[参考文献]

[1] GAO W, GUIRAO J L G, CHEN Y. A toughness condition for fractional(k,m)-deleted graphs revisited [J]. Acta Mathematica Sinica, 2019, 35 (7): 1227 – 1237.

[2] WU J, GAO W. Binding number condition for fractional(g,f,n',m)-critical deleted graph in the new setting [J]. Utilitas Mathematica, 2018, 109: 129 – 137.

[3] GAO W, DIMITROV D, ABDO H. Tight independent set neighborhood union condition for fractional critical deleted graphs and ID deleted graphs [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S, 2019, 12 (4/5): 711 – 721.

[4] GAO W, GUIRAO J L G, WU H. Two tight independent set conditions for fractional(g,f,m)-deleted graphs systems [J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2018, 17 (1): 231 – 243.

[5] 高炜. 小 m 条件下的联结数与分数(k,m)-消去图 [J]. 苏州大学学报(自然科学版), 2012, 28 (1): 1 – 6.

[6] WOODALL D R. The binding number of a graph and its Anderson number [J]. Journal of Combinatorial Theory, 1973, 15: 225 – 255.