

橡胶粘弹性分数导数本构模型合理性研究

何松林, 俞 安, 任 杰

(昆明学院 机电工程学院, 云南 昆明 650214)

摘要: 采用拉普拉斯变换求解仅受与分数阶导数项成正比的力作用的质点运动微分方程, 由其解析解看出, 质点作阻尼振动, 据此提出可采用分数导数项描述橡胶材料的粘弹性力, 并计算得出标准 Kelvin-Voigt 模型和分数导数模型下橡皮筋振子自由振动周期. 实验发现, 橡皮筋振子自由振动的周期比相应的谐振子周期小 (约 6%), 所得结果与分数导数模型的预测一致, 而与标准 Kelvin-Voigt 模型的预测偏离.

关键词: 橡胶; 本构模型; 粘弹性; 分数阶导数; 橡皮筋振子

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-5639 (2020) 06-0078-06

DOI: 10.14091/j.cnki.kmxyxb.2020.06.017

Study on Rationality of Fractional Derivative Constitutive Model of Rubber Viscoelasticity

HE Songlin, YU An, REN Jie

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University, Kunming, Yunnan, China 650214)

Abstract: Laplace transform is used to solve the particle motion differential equation which is only affected by the force directly proportional to the fractional derivative term. From the analytical solution, it can be seen that the particle vibrates with damping. Therefore, the fractional derivative term can be used to describe the viscoelastic force of rubber material. The standard Kelvin Voigt model and the free vibration period expressions of rubber band oscillator under the fractional derivative model are obtained. The experimental results show that the free vibration period of rubber band oscillator is about 6% smaller than that of corresponding harmonic oscillator. This result is consistent with the prediction of fractional derivative model, but deviates from the prediction of standard Kelvin Voigt model.

Key words: rubber; constitutive model; viscoelasticity; fractional derivative; rubber band vibrator

橡胶是具有多种特殊性质的材料, 在工业中有广泛的应用. 为了在工程实践中充分利用各种橡胶材料, 弄清楚各类橡胶材料的力学性质就显得格外重要^[1]. 橡胶既具有超弹性又具有粘弹性, 为描述其力学性质, 出现了多种本构模型, 而建立模型几乎都采用对具体材料或结构的实验数据进行非线性最小二乘拟合的方法, 并依据拟合精度的要求确定参数个数^[2-7], 对于工程应用而言, 这样的做法无可厚非, 特别是现代计算机具有强大的功能, 很容易支持采用这些模型进行工程建模, 但此方法又似乎缺乏对材料性质产生机制及如何更好描述材料性质等方面的探究. 因此, 本文拟通过对仅受与分数阶导数项成正比的力作用的质点运动微分方程的求解, 对由橡皮筋和质量块构成的橡皮筋振子自由振动进行理论分析和实验观察, 以说明采用分数导数本构模型描述橡胶材料的粘弹性是更加合理的选择.

1 橡胶材料本构模型现状

橡胶材料的力学性质非常复杂, 其既具有超弹性也具有粘弹性. 在静态或准静态时, 其主要表现出非线性弹性和蠕变、松弛等静态粘弹性行为, 而在动态时则表现出力学性质随载荷加载快慢变化的动态粘弹性行为. 为描述这些性质, 出现了专门针对其非线性弹性的超弹本构模型^[2,5,6], 以及针对其粘弹性的粘

收稿日期: 2020-10-05

基金项目: 云南省地方本科高校基础研究联合基金资助项目 (2017FH001-018).

作者简介: 何松林 (1964—), 男, 云南保山人, 教授, 硕士, 主要从事非线性振动研究.

弹本构模型^[3]和试图全面描述其性质的超弹-粘弹本构模型^[4,7]. 超弹本构模型数量众多, 但都可以归为采用统计热力学和连续介质力学确定应变能函数两大类. 粘弹性本构模型的建立主要是根据实验数据拟合出数学表达式, 这种方法能够高精度逼近实验曲线, 但模型参数没有明确的物理意义. 至于超弹-粘弹本构模型, 则是将已有的超弹和粘弹模型结合起来去处理具体材料的力学性质.

材料的结构决定其性质是自然科学的重要思想, 因而采用基于对材料结构认识所作的假设而推导出的本构模型应该是更合理的选择, 也许此模型对实验数据的拟合精度不够高, 但可通过对假设的修正或增加相应的条件逐渐改善. 而仅仅采用拟合实验数据的做法, 可能会削弱对材料力学性质产生的机理的探究, 且拟合得到的关系式难以在与实验条件差异较大的情况下应用. 此外, 能反映本质规律的表达式应该是简洁的, 换句话说, 太多个参数的本构方程可能不能揭示材料的本质特征.

当探讨涉及橡胶粘弹性问题时, 标准机械模型是经常采用的一类本构模型^[8]. 此模型将粘弹性视为既有弹性又有粘性, 采用弹簧模型描述弹性, 用牛顿粘壶描述粘性. 不同数量的弹簧和粘壶串联或并联构成不同的模型, 比如: 一个弹簧和一个粘壶并联构成 Kelvin-Voigt 模型; 一个弹簧和一个粘壶串联构成 Maxwell 模型; 一个弹簧和一个 Kelvin-Voigt 模型串联构成三元件模型等. 标准机械模型在工程建模中有大量的应用, 但该模型将高分子材料特有的统一粘弹性用粘性和弹性的不同组合进行描述, 存在无法探究结构与性质关系的不足. 当然, 这主要是由于难以找到直接描述粘弹性的数学工具而造成的.

近年来, 随着分数阶微积分的发展, 它也被用来处理粘弹性问题^[9-12], 很多工作已证明分数阶导数模型 (即用 Abel 体代替牛顿粘壶后构成的机械模型) 对实验数据的拟合有更好的效果. 虽然有采用分数阶导数模型进行橡胶材料构件建模分析研究的报道, 但分数阶导数模型是否能更好地描述粘弹性, 它是否更接近粘弹性的本质等问题都没有解决, 加之人们对分数阶微积分的相对陌生, 多数实际工程建模仍采用传统机械模型.

2 粘弹性力可以由分数导数项表示

设一个质点, 仅仅受到与分数阶导数项成正比的力的作用, 由牛顿第二定律可得质点得运动微分方程为

$$\ddot{x} + k \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, \quad (1)$$

其中 k 为常数, $0 < \alpha \leq 1$ 是 Caputo 分数阶导数的阶数.

设初始条件为 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$, 对上式进行拉普拉斯变换

$$L[\ddot{x} + k \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}; s] = L[0; s], \quad (2)$$

利用二阶导数及 Caputo 分数阶导数 Laplace 变换的性质^[13]得

$$s^2 X(s) - sx_0 - v_0 + k[s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x_0] = 0, \quad (3)$$

即

$$X(s) = \frac{s^{1-\alpha}}{s^2 + ks^\alpha} x_0 + k \frac{s^{-1}}{s^2 + ks^\alpha} x_0 + \frac{s^{-\alpha}}{s^2 + ks^\alpha} v_0. \quad (4)$$

由 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad (\text{Re}(\alpha) > |a|^{\frac{1}{2}}), \quad (5)$$

其中 $E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z)$ 是双参数的 Mittag-Leffler 函数的 k 阶导数, 可以得到

$$L^{-1}\left[\frac{s^{1-\alpha}}{s^2 + ks^\alpha}; t\right] = E_{2-\alpha, 1}(-kt^{2-\alpha}), \quad (6)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s^{-1}}{s^2 + ks^\alpha}; t\right] = t^{2-\alpha} E_{2-\alpha, 3-\alpha}(-kt^{2-\alpha}), \quad (7)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s^{-\alpha}}{s^2 + ks^\alpha}; t\right] = t E_{2-\alpha, 2}(-kt^{2-\alpha}). \quad (8)$$

对(4)式进行 Laplace 反变换,并将(6)、(7)和(8)式代入,得方程(1)满足所设初始条件的特解为

$$x(t) = x_0 E_{2-\alpha,1}(-kt^{2-\alpha}) + kx_0 t^{2-\alpha} E_{2-\alpha,3-\alpha}(-kt^{2-\alpha}) + v_0 t E_{2-\alpha,2}(-kt^{2-\alpha}). \quad (9)$$

由双参数 Mittag-Leffler 函数和 Gammar 函数的定义及性质可得

$$E_{2-\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma[k(2-\alpha)+1]}, \quad (10)$$

$$E_{2-\alpha,3-\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma[k(2-\alpha)+1]} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma[(k+1)(2-\alpha)+1]}, \quad (11)$$

令 $j = k + 1$, (11) 式化为

$$E_{2-\alpha,3-\alpha}(z) = \frac{1}{z} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma[j(2-\alpha)+1]} - \frac{z^0}{\Gamma(1)} \right\} = \frac{1}{z} [E_{2-\alpha,1}(z) - 1]. \quad (12)$$

利用(12)式可将(9)式化简,得到方程(1)的解为

$$x(t) = x_0 + v_0 t E_{2-\alpha,2}(-kt^{2-\alpha}), \quad (13)$$

(13) 式是方程(1)的精确解,由(13)式可看出,受到与分数阶导数项成正比的力作用的质点的位移随时间的变化只与质点的初速度有关,与初始位移没有关系;若质点初速度为零,质点将静止在初始位置.从这个角度来看,与分数阶导数项成正比的力是一种阻力.

为考察在不同阶数的分数阶导数力作用下质点的位移随时间的变化情况,在 $x_0 = 1 \text{ m}$, $v_0 = 1 \text{ m/s}$, $k = 1 \text{ s}^{\alpha-2}$ 的情况下,对不同 α 取值,按(13)式作出运动曲线,如图 1 所示.

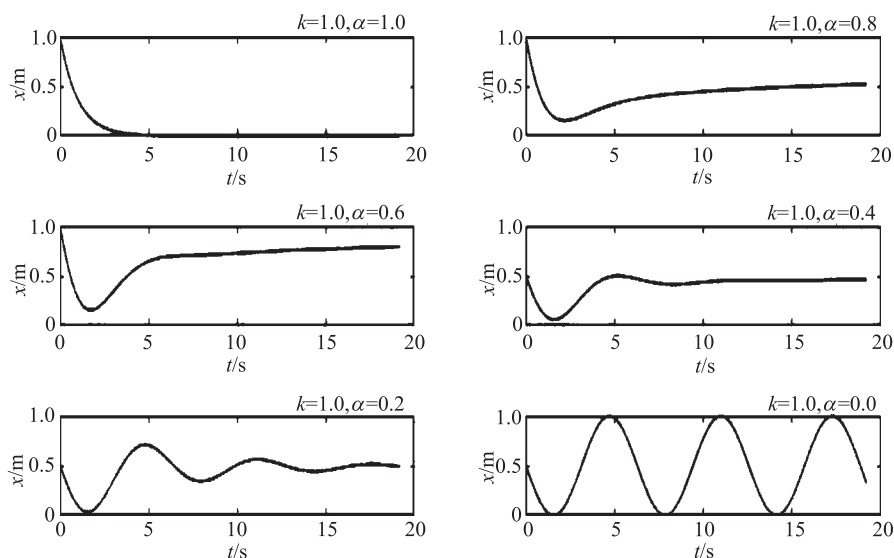


图 1 不同阶数的分数阻尼力下质点的位移时间图

从图 1 可看出,随 α 值由 1 逐渐向趋近于 0,质点的运动由单向地趋于平衡位置,逐渐变成在平衡位置附近振荡,且振幅的衰减逐渐变慢,“振荡性”逐渐增强.

众所周知,受弹性力作用的质点(谐振子)的振动,会因为粘性阻力的存在使振幅衰减,甚至会让质点变成单向运动.因而,从上面的分析可以看出,分数阶导数项力既可提供“弹性”,同时也能提供“阻尼”,分数导数项的阶数 α 会影响两者的比例.

高分子材料的粘弹性使其既表现出弹性又表现出粘性,而不同材料表现出的“弹性”和“粘性”的占比各不相同,这与受分数阶导数项力作用的质点表现出的运动性质相同.由此,本文提出,采用分数阶导数项力去描述材料的粘弹性力;分数阶导数的阶数 α 作为表征材料粘弹性的参数,称为粘弹度,是一个由材料结构确定的无量纲实数.

3 传统 Kelvin-Voigt 和分数导数模型下橡皮筋振子的运动

为了考察粘弹性分数导数模型的合理性,将其与常见的 Kelvin-Voigt 模型进行对比研究.

设有一根轻质橡皮筋, 其一端固定, 另一端连接一个质量为 m 的质点, 质点可在光滑水平面上自由运动, 将这样的系统称为橡皮筋振子 (图2). 换句话说, 仅受轻质橡皮筋作用的质点构成橡皮筋振子.

如图2所示, 质点在光滑水平面上自由运动, 自始至终只受到橡皮筋的张力作用, 将该力记为 F , 它由橡皮筋材料的超弹性和粘弹性形成的弹性力 N 和粘弹性力 f 叠加而成. 橡胶材料的超弹性主要表现为非线性弹性, 即应力随应变的变化是非线性的. 但在温度和环境条件不改变, 以及在一定的应变范围内, 应力随应变的变化关系满足胡克定律. 即橡皮筋的弹性力为

$$N = -k_0 x(t), \quad (14)$$

其中 k_0 称为橡皮筋的弹性系数.

若采用传统的 Kelvin-Voigt 模型描述橡胶的粘弹性, 粘弹性被看成一个理想弹簧和一个理想粘壶串联. 此模型下, 橡皮筋的粘弹性力表示为

$$f = -k_1 x(t) - c_1 \dot{x}(t), \quad (15)$$

其中 k_1, c_1 是与橡皮筋材料和几何尺寸有关的常数. 在此情况下, 橡皮筋的张力可表示为

$$F = -kx(t) - c_1 \dot{x}(t), \quad (16)$$

其中 $k = k_0 + k_1$.

如果采用分数导数模型, 用分数阶导数项力表示橡胶材料的粘弹性力, 有

$$f = -c_2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x(t), \quad (17)$$

则橡皮筋的张力可表示为

$$F = -k'x(t) - c_2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x(t), \quad (18)$$

其中 $k' = k$.

由(16)和(18)式可见, 无论是采用 Kelvin-Voigt 模型还是分数导数模型, 橡皮筋的张力都由两部分构成, 一部分与伸长量成正比, 另一部分与伸长量随时间的变化量有关系. 若采用静态拉伸法测橡皮筋的弹性系数, 由于伸长量随时间的变化量可视为零, 可得到 $k' = k$.

对于图2所示的橡皮筋振子, 利用牛顿第二定律, 考虑橡皮筋张力的表达式(16), 得到由标准 Kelvin-Voigt 模型得到橡皮筋振子的运动微分方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (19)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\xi = \frac{c_1}{2\sqrt{km}}$.

若采用分数阶导数项模型, 考虑橡皮筋张力的表达式(18), 橡皮筋振子的运动方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (20)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\beta = \frac{c_2}{2m}$.

(19)式和(20)式分别是谐振子在粘性阻尼和分数阻尼下的自由振动方程. 若初始条件设为

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0, \quad (21)$$

则(19)式的解为

$$x(t) = x_0 e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t), \quad (22)$$

其中 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} < \omega_0$.

由于(20)式是含分数阶导数项的二阶常微分方程, 至今没有精确解的报导. 采用平均法^[14]可求得其近似解析解为



图2 橡皮筋振子示意图

$$x(t) = x_0 e^{-\beta \omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2} t} \cos(\omega'_d t), \quad (23)$$

其中 $\omega'_d = \omega_0(1 + \beta \omega_0^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2}) > \omega_0$. 数值模拟发现, 当 $\beta < 1$ 时, (23) 式的精确度很高.

若将由橡皮筋静态拉伸法测出的弹性系数 k 和质点质量 m 确定的谐振子自由振动周期设为

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (24)$$

则按传统 Kelvin-Voigt 模型预测的橡皮筋振子自由振动的周期为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} > T_0, \quad (25)$$

而按分数导数模型预测的橡皮筋振子的周期为

$$T'_d = \frac{2\pi}{\omega'_d} < T_0. \quad (26)$$

从上面的分析可以看出, 构建一个可视作橡皮筋振子的橡皮筋质量系统, 通过静态拉伸法测量出橡皮筋的弹性系数 k , 测量出系统的质量 m 后, 可以算出谐振子自由振动周期 T_0 .

观察橡皮筋质量系统的自由振动实验, 测出振动周期 T_s . 根据 T_s 是大于还是小于 T_0 , 就可以判定哪一种模型更合理.

4 橡皮筋质量系统的自由振动实验

为了判断 Kelvin-Voigt 模型和分数导数模型哪一个更合理, 用工业橡皮筋与质量块构成橡皮筋质量系统进行自由振动实验. 橡皮筋长约 25 cm, 横截面约为 1.2 mm × 1.2 mm 的正方形, 质量为 $m_0 = 1.14$ g. 实验在复旦天欣科教仪器有限公司产的 FD-GLB-II 新型焦利式秤实验仪上进行.

采用静态拉伸法测量橡皮筋的弹性系数. 将橡皮筋一端固定在铁架台上, 另一端与钩码架连接, 在钩码架上增减钩码, 并测出橡皮筋对应的长度. 对测量得到的拉力增量与橡皮筋伸长量数据进行线性回归分析, 得到橡皮筋的弹性系数 $k = 9.0968$ N/m.

将橡皮筋的一端固定在铁架台上, 另一端与质量为 $M = 79.37$ g 的物体 (钩码及附加磁钢) 连接, 构成橡皮筋质量系统. 将钩码向下拉离平衡位置, 并由静止开始释放, 观察到物体做振幅衰减的周期振动, 逐渐趋向平衡位置. 采用由磁钢触发霍尔开关进行次数控制的方式, 用 FD-CT-II 型计数计时仪多次测量 4 个周期对应的时间, 测出橡皮筋质量系统自由振动周期为 $T_s = 0.5533$ s.

由于空气阻力和悬挂点处的摩擦力影响很小, 可忽略不计. 将物体和橡皮筋的折合质量作为质点质量, 则橡皮筋质量系统可视作橡皮筋振子. 即上述橡皮筋质量系统的振动实验, 可视作弹性系数 $k = 9.0968$ N/m, 质点质量 $m = M + 1/3 m_0 = 79.75$ g 橡皮筋振子的自由振动. 由 (24) 式得

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.5883 \text{ s}.$$

实验测得 $T_s = 0.5533$ s, 而 $T_0 = 0.5883$ s. 由此可见, T_s 比 T_0 小, 约为 6%. 由 (25) 式和 (26) 式可知, 分数导数模型比 Kelvin-Voigt 模型更合理.

5 小结

综上所述, 本文得出仅受与分数阶导数项成正比力作用质点的运动微分方程的解析解, 并依据该解析解的性质, 提出可采用分数阶导数项去描述高分子材料的粘弹性力. 通过对实验测量得到的橡皮筋质量系统自由振动的周期与传统的 Kelvin-Voigt 模型及分数导数模型预测的周期值进行分析比较, 证明了分数阶导数模型更加合理.

粘弹性材料标准机械模型的思想基础是认为粘弹性是弹性与粘性的组合, 而分数导数模型是用分数阶导数项直接描述材料的粘弹性, 这应该更贴近材料的实际性质. 采用分数导数模型去分析、解释各种高分

子材料的静态和动态粘弹性效应, 逐渐完善粘弹性分数导数本构模型, 将是今后研究工作的努力方向.

[参考文献]

- [1] 吕百龄. 实用橡胶手册 [M]. 2版. 北京: 化学工业出版社, 2010.
- [2] 钱胜, 陆益民, 杨咸启, 等. 橡胶材料超弹性本构模型选取及参数确定概述 [J]. 橡胶科技, 2018, 16 (5): 5-10.
- [3] 陈玉, 成斌, 肖玉, 等. 泡沫橡胶类材料有限变形粘弹性本构模型 [J]. 橡胶工业, 2017, 64 (4): 197-201.
- [4] 于海富, 李凡珠, 杨海波, 等. 橡胶材料非线性高弹-粘弹性本构模型的研究 [J]. 橡胶工业, 2017, 64 (12): 719-723.
- [5] 郭辉, 胡文军, 陶俊林. 泡沫橡胶材料的超弹性本构模型 [J]. 计算力学学报, 2013, 30 (4): 575-579.
- [6] 魏志刚, 陈海波. 一种新的橡胶材料弹性本构模型 [J]. 力学学报, 2019, 51 (2): 473-483.
- [7] 于海富, 李凡珠, 杨海波, 等. 橡胶材料的混合高弹性本构模型研究 [J]. 橡胶工业, 2018, 65 (5): 509-513.
- [8] 杨挺青. 粘弹性理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [9] PARK S W. Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38: 8065-8092.
- [10] 银花, 陈宁. 分数阶导数粘弹性模型的有限元法 [J]. 计算力学学报, 2012, 29 (6): 966-971.
- [11] 赵永玲, 侯之超. 基于分数导数的橡胶材料两种粘弹性本构模型 [J]. 清华大学学报 (自然科学版), 2013, 53 (3): 378-383.
- [12] 杨小军. 广义分数阶粘弹性力学的理论研究 [D]. 徐州: 中国矿业大学, 2017.
- [13] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.
- [14] 申永军, 杨绍普, 邢海军. 含分数阶微分的线性单自由度振子的动力学分析 [J]. 物理学报, 2012, 61 (11): 158-163.

(上接第71页)

[参考文献]

- [1] 沈梅芳, 李小萌, 单琪媛. 薄荷化学成分与药理作用研究新进展 [J]. 中华中医药学刊, 2012 (7): 1484-1487.
- [2] 陆智. 气相色谱-质谱指纹图谱结合聚类分析在薄荷香精风味品质稳定性分析中的应用 [J]. 现代食品科技, 2018, 34 (9): 283-290.
- [3] 彭声静, 刘贺, 王海燕, 等. 一种多功能芳香叶菜栽培瓶: ZL201621131523.0 [P]. 2017-04-26.
- [4] SINGLETON V, ROSSI J A. Colorimetry of total phenolics with phosphomolybdic-phosphotungstic acid reagents [J]. American Journal of Enology and Viticulture, 1965, 16: 144-158.
- [5] ZIELINSKI A A F, HAMINIUK C W I, ALBERTI A, et al. A comparative study of the phenolic compounds and the in vitro antioxidant activity of different Brazilian teas using multivariate statistical techniques [J]. Food Research International, 2014, 60: 246-254.
- [6] JIA Z, TANG M, WU J. The determination of flavonoid contents in mulberry and their scavenging effects on superoxide radicals [J]. Food Chemistry, 1999, 64: 555-559.
- [7] BRAND W W, CUVELIER M E, BERSET C. Use of free radical method to evaluate antioxidant activity [J]. LWT-Food Science and Technology, 1995, 28: 25-30.
- [8] 王建平, 颜景宁, 蔡莉, 等. 栽培方式对不同草莓品种果实中抗氧化物质含量的影响 [J]. 落叶果树, 2011 (4): 4-6.
- [9] 张庆, 袁源, 邓扬龙, 等. 不同栽培方式银耳多糖单糖组成分析及体外抗氧化活性比较 [J]. 食品工业科技, 2019, 40 (8): 54-60.
- [10] ANGGRAINI T, WILMA S, SYUKRI D, et al. Total phenolic, anthocyanin, catechins, DPPH radical scavenging activity, and toxicity of *Lepisanthes alata* (Blume) Leenh. [J]. International Journal of Food Science, 2019(3): 1-7.
- [11] LJOKOCEVIC M, JADRANIN M, STANKOVIC J, et al. Phenolic composition and DPPH radical scavenging activity of plum wine produced from three plum cultivars [J]. Journal of the Serbian Chemical Society, 2019, 84 (2): 141-151.
- [12] 吕爽, 田呈瑞, 王虎, 等. 不同薄荷多酚、总黄酮及体外抗氧化性比较 [J]. 食品工业科技, 2011 (8): 160-163.