

# 分数阶振子的自由振动研究

何松林<sup>1</sup>, 黄焱<sup>2</sup>, 俞安<sup>1</sup>, 任杰<sup>1</sup>

(1. 昆明学院 机电工程学院, 云南 昆明 650214; 2. 昆明学院 物理科学与技术学院, 云南 昆明 650214)

**摘要:** 采用拉普拉斯变换法得到分数阶振子自由振动微分方程的 Mittag-Leffler 函数形式的解析解, 据此分析了分数振子的运动性质. 结果表明: 谐振子和受粘性阻力作用的质点的运动分别是阶数为 2 和 1 的分数阶振子的自由振动; 阶数在 1 到 2 之间的分数阶振子的自由振动是“内禀”的阻尼振动, 振幅衰减的快慢及振动的周期与分数导数的阶数和一次项的系数有关. 同时提出在处理工程实际问题时可采用谐振子阻尼振动近似代替分数振子的自由振动, 并拟合出等效刚度和等效阻尼与分数导数的阶数及一次项系数的关系.

**关键词:** 分数阶振子; 分数导数; Mittag-Leffler 函数; 阻尼振动; 拉普拉斯变换

**中图分类号:** O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674 - 5639 (2020) 03 - 0071 - 04

**DOI:** 10. 14091/j. cnki. kmxyxb. 2020. 03. 015

## Study on Free Vibration of a Fractional Oscillator

HE Songlin<sup>1</sup>, HUANG Yan<sup>2</sup>, YU An<sup>1</sup>, REN Jie<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University, Kunming, Yunnan, China 650214;

2. College of Physical Science and Technology, Kunming University, Kunming, Yunnan, China 650214)

**Abstract:** The analytic solution of free vibration differential equation of a fractional oscillator, which is in the form of Mittag-Leffler function, has been obtained by Laplace transform method. The motion properties of fractional oscillator are analyzed by this analytic solution. It is proved that the harmonic oscillator and the motion of the particle subjected to viscous drag are fractional oscillators of order 2 and 1 respectively. The free vibration of the fractional oscillator, with its order of the fractional derivative from 1 to 2, is intrinsic damped vibration. The speed of amplitude attenuation and the period of vibration are related to the order of the fractional derivative and the coefficient of the first term. It is proposed that the free vibration of a fractional oscillator can be approximately replaced by the damped vibration of a harmonic oscillator when dealing with an engineering problem. The relationship of the equivalent stiffness and damping varying with the order of the fractional derivative and the coefficient of the first term has been gotten by fitting of data.

**Key words:** fractional oscillator; fractional derivative; Mittag-Leffler function; damped vibration; Laplace transform

分数阶微积分的出现已有 300 多年的历史, 近 10 多年来得到快速发展并在科学研究及工程技术中受到广泛关注和应用. 其中, 在粘弹性材料力学性质、反常扩散、信号检测、过程控制等领域采用分数阶微积分的研究已有大量报道<sup>[1-4]</sup>, 且取得很多成果. 而由含有分数阶导数项的微分方程描述的动力学系统运动性质的研究变得越来越重要. 本文将对类比谐振子建立的分数阶振子模型进行研究, 以弄清楚其运动性质.

## 1 分数阶振子模型

众所周知, 谐振子自由振动的微分方程是一个二阶线性常微分方程, 而一个只受粘性阻力作用的质点, 其运动方程可化为一阶线性常微分方程.

如果质点仅受与其位移随时间变化的分数阶导数成正比的力作用, 其运动微分方程可化为分数阶线性常微分方程, 这样的系统被称为分数阶振子<sup>[5]</sup>.

收稿日期: 2020 - 04 - 13

基金项目: 云南省地方本科高校基础研究联合基金资助项目 (2017FH001-018).

作者简介: 何松林 (1964 -), 男, 云南保山人, 教授, 硕士, 主要从事非线性振动研究.

**定义** 运动微分方程为(1)式的质点运动,称为分数阶振子的自由振动.

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + kx(t) = 0, \quad (1)$$

(1)式中  $1 \leq \alpha \leq 2$ , 分数阶导数采用 Caputo 定义<sup>[6]</sup>, 并将初始条件记为:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1. \quad (2)$$

## 2 微分方程的解

拉普拉斯变换法是求解常微分方程初值问题的常用方法,其特点在于变换时就考虑到初始条件的影响,反变换后的结果直接是满足初始条件的特解.对(1)式进行拉普拉斯变换<sup>[7]</sup>:

$$L\left[\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + kx(t); s\right] = L[0; s]. \quad (3)$$

利用 Caputo 分数阶导数 Laplace 变换的性质

$$L[{}_a^c D_t^\alpha f(t); s] = s^\alpha X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} f^{(i)}(0), \quad (4)$$

得  $s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x_0 - s^{\alpha-2}x_1 + kX(s) = 0$ , (5) 整理得:

$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}x_0 + s^{\alpha-2}x_1}{s^\alpha + k}. \quad (6)$$

Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换公式为:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{a\alpha+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\pm at^\alpha) dt = \frac{m! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{m+1}}, \quad (\text{Re}(\alpha) > |\alpha|^{1/2}), \quad (7)$$

其中  $E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z)$  是双参数的 Mittag-Leffler 函数的  $m$  阶导数.当  $\beta = 1, m = 0$  时,(7)式化为:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} E_{\alpha,1}(\pm at^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}, \quad (8)$$

可得:  $L^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}; t\right] = E_{\alpha,1}(-kt^\alpha)$ . (9)

当  $\beta = 2, m = 0$  时,(7)式化为:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t E_{\alpha,2}(\pm at^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha \mp a}, \quad (10)$$

从而  $L^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + k}; t\right] = t E_{\alpha,2}(-kt^\alpha)$ . (11)

对(6)式进行 Laplace 反变换,利用(9)和(11)得方程(1)的解为:

$$x(t) = x_0 E_{\alpha,1}(-kt^\alpha) + x_1 t E_{\alpha,2}(-kt^\alpha). \quad (12)$$

## 3 分数阶振子的运动性质

### 3.1 阶数为 2 的分数阶振子表示谐振子

当  $\alpha = 2$  时,方程(1)化为典型的谐振子运动方程

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0. \quad (13)$$

在此情况下,(12)式化为:

$$x(t) = x_0 E_{2,1}(-kt^2) + x_1 t E_{2,2}(-kt^2). \quad (14)$$

两参数 Mittag-Leffler 函数的定义为:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 1, z \in C, \quad (15)$$

其中  $\Gamma(z)$  是 Gamma 函数,当  $z$  为整数时,  $\Gamma(z) = (z-1)!$ .由(15)式可推出:

$$E_{2,1}(\lambda^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}, \quad E_{2,2}(\lambda^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n+1)!}. \quad (16)$$

利用 e 指数的级数展开式  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , 可得:

$$E_{2,1}(\lambda^2) = \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda}), \quad E_{2,2}(\lambda^2) = \frac{1}{2\lambda}(e^\lambda + e^{-\lambda}). \quad (17)$$

利用欧拉公式可得:

$$E_{2,1}(-kt^2) = \frac{1}{2}(e^{i\sqrt{k}t} + e^{-i\sqrt{k}t}) = \cos(\sqrt{k}t), \quad (18)$$

$$t E_{2,2}(-kt^2) = \frac{1}{2i\sqrt{k}}(e^{i\sqrt{k}t} - e^{-i\sqrt{k}t}) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t). \quad (19)$$

将(18)和(19)式代入(14)式得:

$$x(t) = x_0 \cos(\sqrt{k}t) + \frac{x_1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t), \quad (20)$$

或  $x(t) = x_0 \cos(\sqrt{k}t + \theta)$ , (21)

其中初相位由  $\tan \theta = -\frac{x_1}{\sqrt{k}x_0}$  确定.(20)或(21)式是

熟知的简谐振动的位移公式,表明阶数为 2 的分数阶振子确实是谐振子,并间接说明了(12)式的正确性.

**3.2 阶数为 1 的分数阶振子表示受粘性阻力作用的质点**

当  $\alpha = 1$  时,方程(1)化为受粘性阻力作用的质点的运动方程

$$\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0. \quad (22)$$

若设质点速度为零处为坐标原点,初始位移

$x(0) = x_0$  (此时的初始速度  $\dot{x}(0) = -kx_0$ ), 则(12) 式化为:

$$x(t) = x_0 E_{1,1}(-kt) = x_0 e^{-kt}, \quad (23)$$

与(22) 式常规解法得到的结果完全相同.

### 3.3 分数阶振子的运动状态随阶数和线性项系数变化

设初始速度  $x_1 = 0$ , 则(12) 式简化为

$$x(t) = x_0 E_{\alpha,1}(-kt^\alpha). \quad (24)$$

由于 Mittag-Leffler 函数是大多数人比较陌生的特殊函数, 为了能够直观地感受(24) 式表示的分数阶振子位移随时间的变化情况, 利用(15) 式, 编程计算不同值的分数阶振子的位移随时间变化情况. 计算中取  $x_0 = 5 \text{ m}$ ,  $k = 2 \text{ kgm}^\alpha \text{ s}^{-\alpha}$ ,  $\alpha$  从 2 变化到 1, 结果显示如图 1.

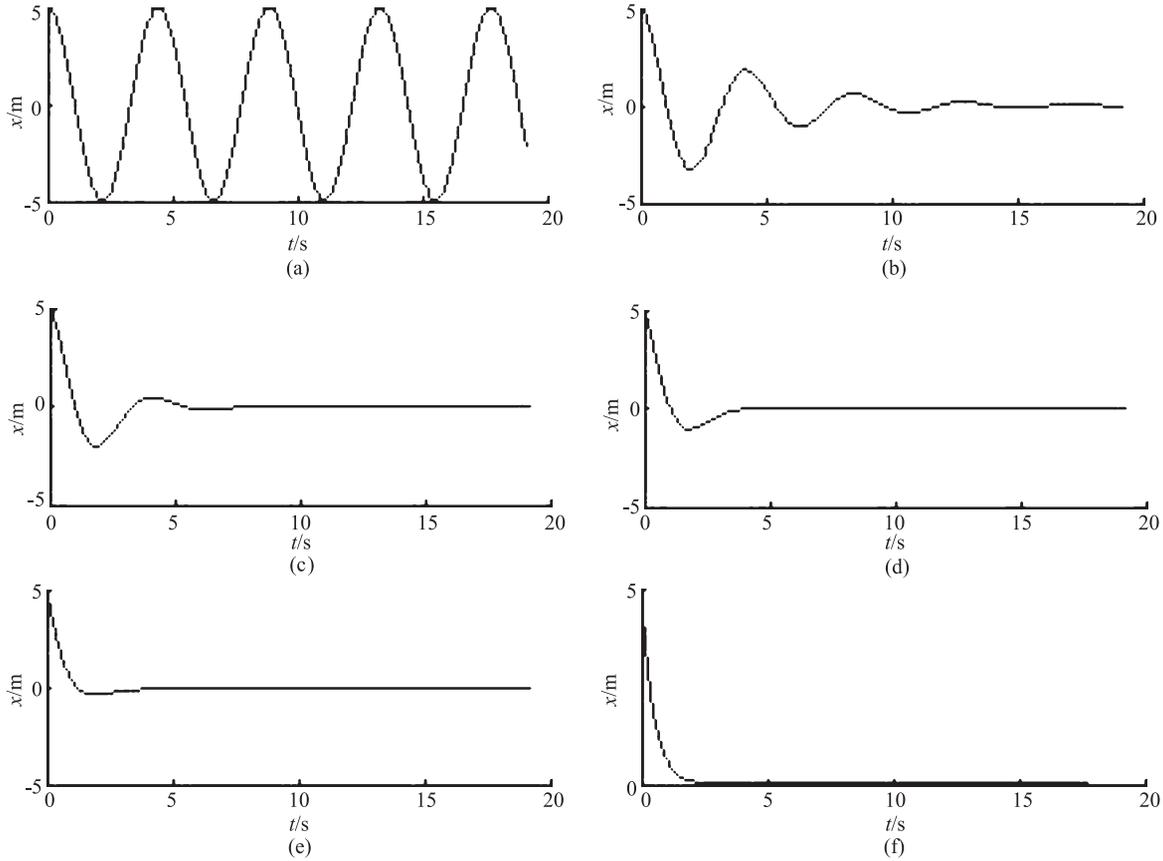


图1 不同阶数的分数阶振子的位移时间图

图 1 中(a), (b), (c), (d), (e), (f) 中的值分别是 2.0, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2, 1.0. 从图 1 可看出, 随  $\alpha$  值的减小, 振幅的衰减加快, 同时“欠阻尼” 振动时的周期随  $\alpha$  的减小而增大. 换句话说,  $\alpha$  值既影响振子的振幅衰减, 同时也影响振动的周期.

为观察线性项系数对分数振子运动影响, 取  $x_0 = 5 \text{ m}$ ,  $\alpha = 1.8$ ,  $k$  分别取 0.5, 1.0, 1.5  $\text{kgm}^{1.8} \text{ s}^{-1.8}$ , 按(24) 式计算系统位移随时间的变化情况, 结果显示如图 2. 由图 2 可见,  $\alpha$  固定时, 随  $k$  的增大, 振子的振幅衰减加快, 振动周期减小.

由上面的分析可知, 分数振子的自由振动是阻尼振动, 这是一种“内禀” 的阻尼振动, 是系统自身性质决定的. 分数阶振子的分数导数阶数和线性项

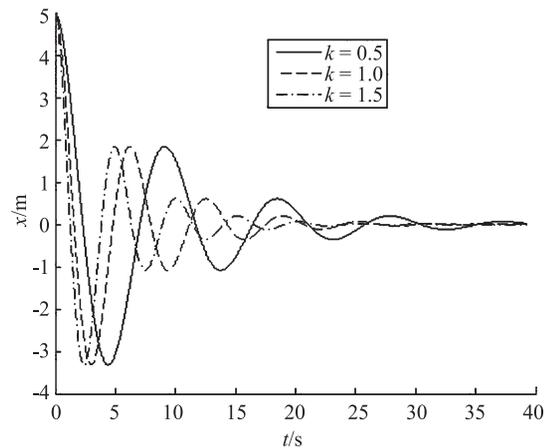


图2 不同线性项系数的分数阶振子的位移时间图

系数都会影响分数阶振子振幅衰减的快慢程度和振

动的周期. 线性项系数不变时, 随分数导数阶数  $\alpha$  值的减小, 振子振幅衰减逐渐加快, 振动周期增大; 分数导数的阶数  $\alpha$  固定时, 随线性项系数的增大, 振子振幅衰减加快, 振动周期减小.

#### 4 分数振子可采用阻尼谐振子近似代替

虽然(12)式给出了分数振子自由振动的解析解, 但由于 Mittag-Leffler 函数相对复杂, 应用不方便. 此外, 由于分数振子“内禀”阻尼振动的位移时间图类似谐振子阻尼振动的位移时间图, 可以将分数振子近似为受粘性阻尼作用的谐振子进行处理. 由前面的分析可知, 分数振子“内禀”阻尼振动的振幅衰减及振动周期既与分数导数阶数值有关, 也与线性项系数有关. 谐振子阻尼振动的振幅衰减是指数量型的, 由观察及量纲分析, 可设分数振子的振幅与  $e^{(\alpha-2)k^{\frac{1}{\alpha}}t}$  成正比, 振动的圆频率与  $(\alpha-1)^B k^{\frac{A}{\alpha}} t$  成正比, 其中  $A, B$  是可调常数. 因此(24)式可近似表示为:

$$x(t) = x_0 e^{-(2-\alpha)k^{\frac{1}{\alpha}}t} \cos[(\alpha-1)^B k^{\frac{A}{\alpha}} t]. \quad (25)$$

对参数  $\alpha, k, x_0$  取不同值的分数振子, 用(25)式对由(24)式给出的位移时间数据进行拟合<sup>[8]</sup>, 得到  $A$  和  $B$  两个常数分别取 10/9 和 1/9 时效果最好. 即(24)的近似公式为:

$$x(t) = x_0 e^{-(2-\alpha)\frac{10}{9}k^{\frac{1}{\alpha}}t} \cos[(\alpha-1)^{\frac{1}{9}} k^{\frac{1}{\alpha}} t]. \quad (26)$$

$\alpha = 1.8, k = 1 \text{ kgm}^{1.8} \text{ s}^{-1.8}, x_0 = 2 \text{ m}$  时的拟合结果见图 3, 其近似解与精确解符合较好.

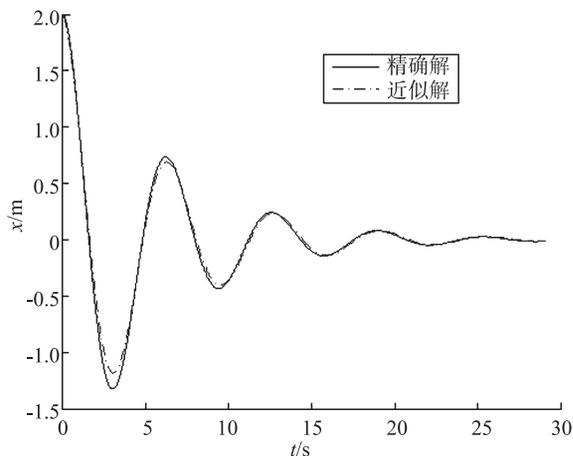


图3 分数阶振子精确解与阻尼谐振子近似解比较

众所周知, 谐振子阻尼振动的微分方程为:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (27)$$

在欠阻尼  $\delta < \omega_0$  情况下的解为:

$$x = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (28)$$

将(28)式与(26)式对比, 可得:

$$\delta = (2-\alpha)^{\frac{10}{9}} k^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (29)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2 = k^{\frac{2}{\alpha}} [(2-\alpha)^{\frac{100}{81}} + (\alpha-1)^{\frac{1}{81}}]. \quad (30)$$

也就是说在实际应用中, 分数振子运动微分方程(1)可以由谐振子阻尼振动微分方程(27)式近似代替, 阻尼和刚度分别由(29)和(30)式给出.

综上所述, 本文定义了分数阶振子, 采用 Mittag-Leffler 函数求出其自由振动微分方程的解析解, 由此得出分数振子的运动性质, 证明了谐振子和受粘性阻力作用的质点的运动分别是阶数为 2 和 1 的分数阶振子的自由振动; 分析得出分数阶振子的“内禀”阻尼振动的振幅衰减及振动周期既与分数导数阶数有关, 也与线性项系数有关; 提出在工程实践中, 可采用谐振子阻尼振动方程近似代替分数振子自由振动方程进行处理. 本文的工作, 对加深理解含分数导数系统的性质, 扩展对“振子”运动的认识, 促进含分数导数的系统在实际工程及其他学科研究中的应用有积极作用.

#### [参考文献]

- [1] 陈文, 孙洪广, 李西成, 等. 力学与工程问题的分数阶导数建模 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [2] MERAL F C, ROYSTON T J, MAGIN R. Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15 (4): 939-945.
- [3] 党选举, 彭慧敏, 姜辉, 等. 基于模糊分数阶 PID 的开关磁阻电机直接瞬时转矩控制 [J]. 振动与冲击, 2018, 37 (23): 104-110.
- [4] 王廷江. 关于分数阶 RL- $\alpha$ -C- $\beta$  并联电路相频特性的讨论 [J]. 大学物理, 2017, 36 (12): 22-25.
- [5] NARAHARIACHAR B N, HANNEKEN J W, ENCK T, et al. Dynamics of the fractional oscillator [J]. Physica A, 2001, 297: 361-367.
- [6] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.
- [7] 王学彬. 拉普拉斯变换方法解分数阶微分方程 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2016, 41 (7): 7-12.
- [8] 周品. Matlab 数值分析应用教程 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2014.