昆明学院学报　2019，41（6）：85～90　ISSN 1674－5639　CN 53－1211/G4
Journal of Kunming University

结合几何方法与 Radon 变换的 CT 系统参数标定模型

王保云，徐春晓，胡雄伟
（云南师范大学 信息学院，云南 昆明 650500）

摘要：针对计算机断层扫描系统由于安装和模板设计产生标定误差和结构恢复问题，提出了一种 CT 系统的参数标定及成像方法．首先运用几何法来计算 CT 参数，然后根据 CT 参数，采用 Radon 变换对物体进行重建，从而获得物体内部结构信息．误差分析结果显示，所使用的方法在系统误差和测量误差的影响下，仍然能够获得到较好的效果．

关键词：计算机断层扫描；参数标定；Radon 变换；误差校正
中图分类号：O29　**文献标识码**：A　**文章编号**：1674－5639（2019）06－0085－06
DOI：10.14091/j.cnki.kmxyxb.2019.06.016

Calibration Model of CT System Parameters Combined Geometric Method with Radon Transform

WANG Baoyun，XU Chunxiao，HU Xiongwei
（College of Information and Science Technology，Yunnan Normal University，Kunming，Yunnan，China　650500）

Abstract：Aiming at the problem of calibration error and structure recovery caused by installation and template design of computed tomography（CT）system，a method of parameter calibration and imaging of CT system is proposed．Firstly，the geometric method is used to calculate the CT parameters．Then，according to the CT parameters，Radon transform is used to reconstruct the object，so as to obtain the internal structure information of the object．Error analysis shows that the method can still achieve good results under the influence of system error and measurement error．

Key words：computed tomography；parameter calibration；Radon inverse transformation；error correction

0　引言

计算机断层扫描（Computed tomography，CT）是广泛应用于医学检查以及工业、安保检测等方面的一项先进影像检查技术．本文以 2017 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛 A 题“CT 系统参数标定及成像”[1]为基础，探索 CT 成像中的标定问题．主要探讨内容包括：1）在正方形托盘上给定两个均匀固体介质组成的标定模板，模板的几何信息如图 1（a）所示．要求在给定模板吸收强度和 CT 成像数据的条件下，确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向．2）给定内部吸收率均匀分布简单结构介质（以下称“简单介质”）的接收信息，确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息，并给出 10 个位置处的吸收率，相对位置如图 1（b）所示，准确位置信息如表 1 所示．3）在同一 CT 系统下，再次对内部吸收率分布较为复杂的介质（以下称“复杂介质”）的接收数据进行相应参数求解．

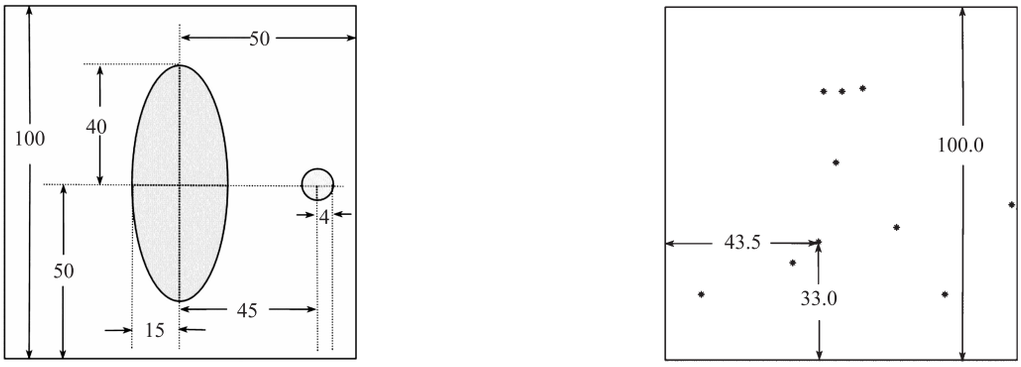
CT 通过对样品进行断层扫描成像获取其内部结构，平行入射的 X 射线垂直射入探测器平面上 512 个等距排列的探测器单元，射线发射器与探测器位置保持相对固定，并且探测器以某一固定点为旋转中心旋转 180 次，各探测器在每次旋转时都会检测到介质吸收衰减后的射线能量，经处理得到 180 组接收信息．因为设备安装造成的误差会对成像质量造成影响，所以要通过对已知物体的成像来

收稿日期：2019－06－15
基金项目：国家级大学生创新创业训练项目（201710681014）；云南省哲学社会科学规划项目（QN2015067）．
作者简介：王保云（1977—），男，云南玉溪人，讲师，博士，主要从事机器学习与数学建模研究．

标定 CT 系统．因此，探讨了几种标定方法后[2-3]，并进行了以下工作．

1）已知模板的几何数据和接收信息，使用几何法确定 CT 的旋转中心在正方形托盘中的位置、单元探测器之间的距离，并且拟合出 180 个 X 射线的方向．CT 系统的成像过程如图 1（a）所示，标定模板几何形状及相关参数如图 1（单位：mm）所示．

2）通过 CT 扫描未知物体得到接收信息，并利用之前得到的标定参数，使用 Radon 逆变换重建物体结构，确定未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率，并且计算给出的 10 个位置的吸收率．10 个位置示意图如图 1（b），坐标信息如表 1 所示．



（a） （b）

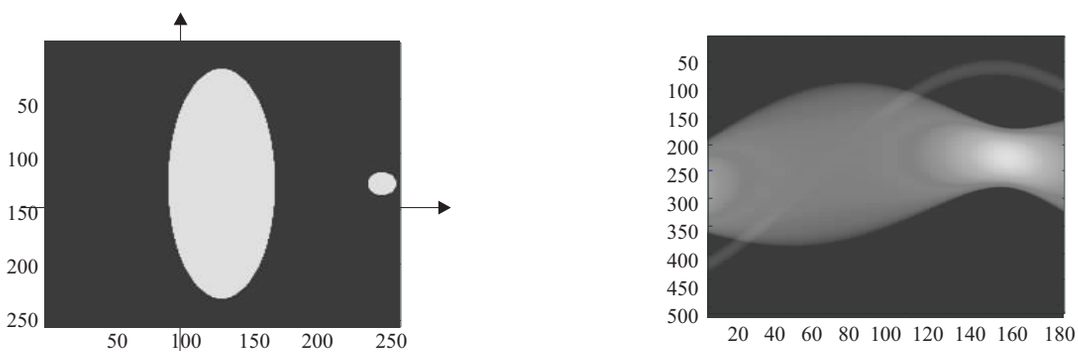
图1 标定模板和10个位置点

表 1 10 个位置的坐标信息

序号	x 坐标	y 坐标
1	10.000 0	18.0000
2	34.500 0	25.000 0
3	43.500 0	33.000 0
4	45.000 0	75.500 0
5	48.500 0	55.500 0
6	50.000 0	75.500 0
7	56.000 0	76.500 0
8	65.500 0	37.000 0
9	79.500 0	18.000 0
10	98.500 0	43.500 0

1 几何法确定 CT 参数的模型

直接将标定模板的接收数据绘制成图像，得正方形托盘的基本结构图，该图是一个均匀的椭圆和一个小圆，如图 2 所示．以旋转中心为原点，分别以椭圆的短轴方向和长轴方向为横坐标和纵坐标，得到图 2（a）．将 512 个探测器在 180 次扫描中得到的数据用图形显示为图 2（b），纵坐标取值范围［1，512］，表示有 512 个探测器；横坐标取值范围为［1，180］，表示进行了 180 次扫描．



(a)托盘上圆和椭圆的位置 (b)探测器旋转接收的数据

图2 样品及探测成像图

1.1 求椭圆的长轴和短轴

在成像过程中，托盘以旋转中心为轴心旋转．当光线平行于椭圆的长轴时，椭圆物体在探测器上成像范围最窄．同样，当光线垂直于椭圆的长轴时，椭圆物体在探测器上的成像范围最宽．据此可知，图 2（b）中图像的最窄处和最宽处的宽度分

别对应椭圆的短轴和长轴.

设图像最宽处纵坐标的上下界分别为 $y_{w,\mathrm{up}}$ 和 $y_{w,\mathrm{down}}$，最窄处纵坐标的上下界分别为 $y_{n,\mathrm{up}}$ 和 $y_{n,\mathrm{down}}$，则得到椭圆物体的长轴和短轴分别为：

$$s_{\mathrm{long}} = y_{w,\mathrm{up}} - y_{w,\mathrm{down}} + 1; \tag{1}$$

$$s_{\mathrm{short}} = y_{n,\mathrm{up}} - y_{n,\mathrm{down}} + 1. \tag{2}$$

式中 s_{long} 和 s_{short} 分别表示椭圆的长轴和短轴. 由于数据中一个点代表一个探测器单位，所以 s_{long} 和 s_{short} 的单位是“个探测单位”.

根据给定的数据，得到短轴对应的数据为 $x_n = 152$，$y_{n,\mathrm{up}} = 169$ 和 $y_{n,\mathrm{down}} = 276$. 对于长轴，则出现多组对应数据，$58 \leqslant x_w \leqslant 65$ 时，所得 s_{long} 值均为 289 个探测单位，因此，长轴对应的数据为 $x_w = 62, y_{w,\mathrm{up}} = 89$，$y_{w,\mathrm{down}} = 380$，根据公式（1）和（2）计算得到相关参数为 $s_{\mathrm{long}} = 289$ 个探测单位，$s_{\mathrm{short}} = 108$ 个探测单位.

对于 s_{long} 和 s_{short}，可以直接在图 2（b）所对应的数据文件中统计非零数字的个数，所得结果与上述结果一致.

1.2　探测器的间距和旋转中心

由图 1 可知，椭圆的长轴为 80 mm，且用于标定的椭圆物体是均匀固体介质，根据前面计算所得长轴长度可以计算出探测器间距：

$$g = \frac{80}{s_{\mathrm{long}}} = \frac{80}{289} = 0.276\,8 \text{ mm}.$$

根据图 2（b）图像中最窄处中点位置与探测器平面中心的偏差得到椭圆中心点的横坐标公式：

$$x_c = [256 - (y_{n,\mathrm{up}} + y_{n,\mathrm{down}})/2]g, \tag{3}$$

式中 256 为 512 个探测器的中线. 代入（3）式，计算得到 $x_c = -9.272\,8$ mm.

同理，椭圆物体中心点的纵坐标 y_c 计算公式为：

$$y_c = [256 - (y_{w,\mathrm{up}} + y_{w,\mathrm{down}})/2]g. \tag{4}$$

因为探测数据在 $58 \leqslant x_w \leqslant 65$ 均为最长，且 $s_{\mathrm{long}} = 289$ 个探测单位，取 $x_w = 61$ 和 $x_w = 62$ 的均值计算 y_c，得：

$$y_c = \left[256 - \frac{89.5 + 377.5}{2}\right] \times 0.276\,8 = 6.228\,0 \text{ mm}.$$

综合上述结果，得到旋转中心坐标为：$(x_c, y_c) = (-9.272\,8, 6.228\,0)$.

1.3　Radon 逆变换与吸收系数

1.3.1　Radon 变换

Radon 变换是对图像中的物体进行线积分，其变换公式为：

$$g(s,\theta) = Rf(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

式中参数的取值范围为 $-\infty \leqslant s \leqslant +\infty$，$0 \leqslant \theta < \pi$. 根据 CT 断层扫描数据来恢复标定模板数据，需要用 Radon 逆变换来完成. Radon 逆变换的公式为[4]：

$$f(x,y) = R^{-1}g(d,\varphi) = \frac{2}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x\cos\theta + y\sin\theta - s}\frac{\partial g(s,\theta)}{\partial s}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta, \tag{6}$$

其中投影射线的方程为：

$$l_{s,\theta}: x\cos\theta + y\sin\theta = s, \tag{7}$$

式中 θ（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）为投影射线的方向与 x 轴正方向之间的夹角，s 为原点到投影射线的距离.

将 CT 断层扫描数据执行 Radon 逆变换，则可得到恢复数据.

1.3.2　吸收系数计算与托盘定位

由于恢复数据存在噪声，因此需要对噪声进行去除，从而得到与标定模板对应的数据，成为有效区域. 对逆变换后有效区域的数据和托盘的原始数据对比分析，发现变换后恢复的数据比原始数据小，即存在吸收率. 因为各点之间吸收率有一定差异，所以可用平均吸收率来描述系统的吸收率，计算公式如下：

$$\lambda = \frac{1}{N}\sum_{ij}\frac{R(i,j)}{I(i,j)}, \tag{8}$$

式中 $I(i,j)$ 为坐标位置在 (i,j) 点的原始模板数据. 根据给定的数据，我们知道 $I(i,j) \equiv 1, \forall i,j$；$R(i,j)$ 为 Radon 逆变换后恢复数据，为标定模板中数据点个数.

经计算吸收率，得 $\lambda = 0.489\,8$，据此得到增益系数为：

$$k = 1/\lambda = 2.041\,6, \tag{9}$$

公式（9）的计算需要先将 Radon 逆变换后数据进行噪声去除、旋转和缩放，使之与标定模板一一对应.

1.4　初始角度与单次旋转角度

1.4.1　初始角度

初始角度的计算可以利用标定模板的几何特性来确定. 因为模板中椭圆物体较为显著，所以以椭

圆的长轴或短轴方向来测定模板的初始角度较为容易．因此，以根据椭圆的中心为参考，求解其长轴所在的直线方程，然后计算其与坐标轴的夹角即可得到初始角度．上述方法可以采用投影法来实现，即将恢复数据在纵轴上投影，当其旋转角度等于初始角度时，椭圆长轴平行于纵轴，所得投影区间最长，这时所得角度即为所求．

通过计算，得到初始角度为 $\theta_0 = 29.517\,9°$．

1.4.2 单次旋转角度

小球的运动轨迹是由探测器所在平面与正方形托盘的相对旋转运动产生的，因此其轨迹应当是一个三角函数曲线[5-6]．找到小球的上轨，记录每一次旋转时小球在接收器上的最高点，即小球轨迹的上边缘．同时，记录旋转的次数 t 和最高点的探测器数 F，将每次探测所得探测器号码减去 256，得到 F^*，将 t 作为自变量，F^* 作为因变量，对数据进行拟合，发现由于从投影到图形的变化，使用 Fourier 方法拟合出的函数曲线最接近于找出的各个点，如图 3 所示．拟合出的曲线如下．

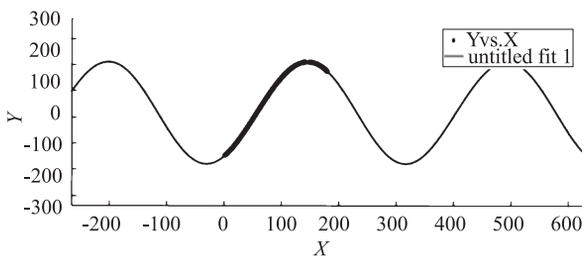


图3 运动轨迹拟合曲线

$$F^* = c_0 + c_1\cos(\alpha t) + d_1\sin(\alpha t) + c_2\cos(2\alpha t) + d_2\sin(2\alpha t),$$

式中各拟合系数的取值分别为 $c_0 = 16.82$，$c_1 = 167.00$，$c_2 = 1.516$，$d_1 = 100.60$，$d_2 = 1.959$，$\alpha = 0.018\,1$．

通过分析知，（52，0）至（144，210）为 1/4 个周期，即 92 次旋转总和为 90°，则每次旋转的度数为：

$$\theta_r = \frac{90°}{92} \approx 0.978\,3°. \tag{10}$$

由图 3 可知，由于初始状态下偏转度数为 29.517 9°，所以第 n 次旋转的角度为逆时针方向，计算式为：

$$\begin{aligned}\theta_n &= \theta_0 + (n-1)\theta_r \\ &= 29.517\,9° + (n-1)\times 0.978\,3°.\end{aligned} \tag{11}$$

2 基于 Radon 逆变换的物体重构模型

2.1 物体重构与参数计算

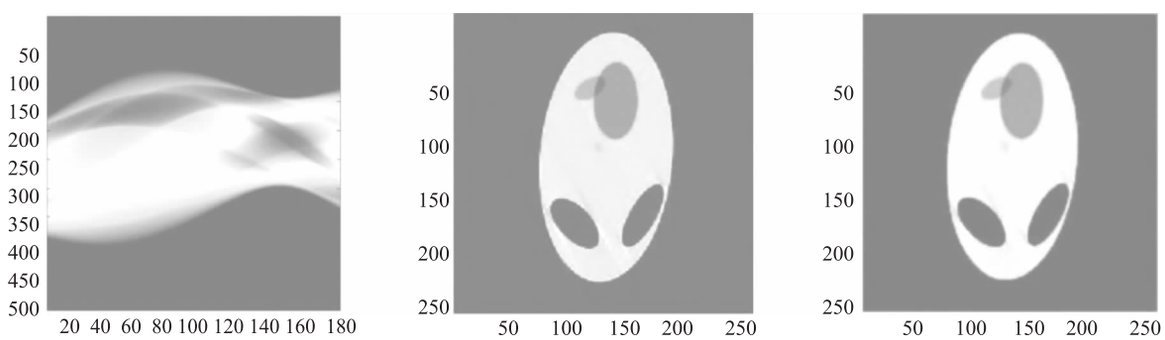
2.1.1 图像重构

根据前述 Radon 逆变换，可以由 CT 断层扫描数据来进行数据恢复．简单介质的数据如图 4（a）所示．对数据进行 Radon 逆变换，并根据初始角度 θ_0 进行旋转，然后根据正方形托盘参数进行数据压缩，得到 256×256 大小的图像，如图 4（b）所示．

由于空气等杂质干扰，部分恢复数据值接近 0，甚至为负值，因此需要进行噪声抑制．这里采用抑制法滤波，滤波器设计为：

$$\tilde{I} = \begin{cases} 0, & I < \varepsilon, \\ I, & I \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{12}$$

式中 $\tilde{I}$ 为滤波后数据，I 为 Radon 逆变换恢复数据，ε 为抑制阈值．当 $\varepsilon = 0.1$ 时，得到滤波后重构的图像如图 4（c）所示．



（a）原始数据 (b)重构图像 (c)滤波后结果

图4 简单介质的数据与重构图像示意图

2.1.2　椭圆参数计算

对 6 个椭圆的参数计算分为两步进行.

第 1 步　计算椭圆中心和中心点介质吸收率. 针对特定椭圆，选取两条平行于 y 轴的切线，得到两个切点 $A(x_a, y_a)$，$B(x_b, y_b)$. 因为关于椭圆中心点对称，所以该两个切点连成直线的中点 $O(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2})$ 即为椭圆形的中心点. 又因为每个椭圆的介质是较为均匀的，所以以椭圆的中点作为吸收率样本点，同时结合前面计算得到的吸收系数 k，则可得到各中心点吸收率.

第 2 步　计算椭圆的长轴和短轴. 通过对图像进行旋转，使特定椭圆在 x 轴方向的投影最短，在 y 轴方向的投影最长，则可得到该椭圆的旋转角度、长轴长和短轴长.

通过上述两步，可得到椭圆参数，如表 2 所示. 表中旋转角度均为逆时针方向.

根据吸收系数 k，计算得到 10 个对应位置的吸收率数据，如表 3 所示.

表 2　椭圆参数

椭圆	椭圆中心坐标/mm	长半轴/mm	短半轴/mm	旋转角(逆时针)/(°)	吸收率
1	(0.578 5，1.909 1)	40.723	21.423	5	1.003
2	(−9.650 0，−19.878 8)	10.229	5.404	136	0.000
3	(12.544 9，−17.369 9)	11.773	4.632	30	0.000
4	(−4.632 0，24.703 8)	5.597	2.895	60	1.198
5	(3.667 0，16.404 9)	12.545	7.141	2	1.311
6	(−1.929 3，5.400 4)	1.930	1.351	150	1.069

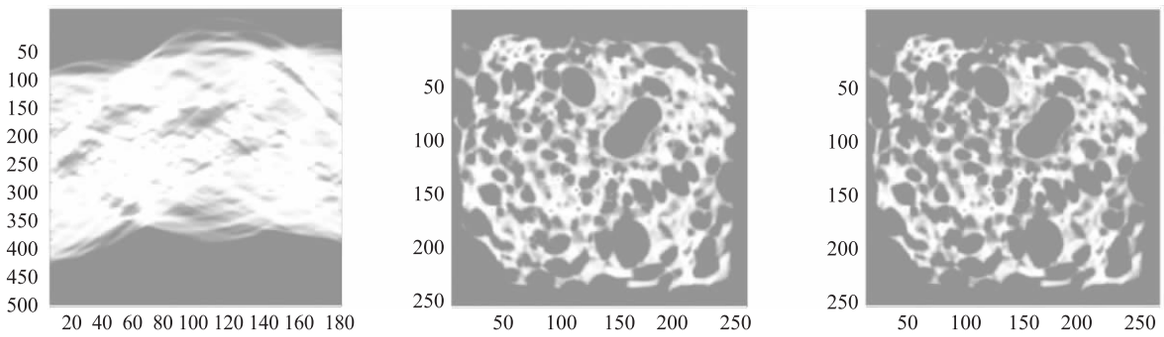
表 3　简单介质的 10 个位置点吸收率

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
吸收率	0.000 0	0.998 5	0.000 0	1.202 2	1.072 1	1.385 9	1.296 9	0.000 0	0.000 0	0.000 0

2.2　复杂介质重构与参数计算

对给定数据（图 5（a）所示）进行重构，得到图 5（b）所示的结构，并进行抑制滤波，得到图 5（c）.

采取同样的方法，得到 10 个位置的吸收率信息，如表 4 所示.



（a）复杂介质原始数据　（b）重构图像　（c）抑制滤波后图像

图5　复杂介质接收数据与重构图像示意图

表 4　复杂介质的 10 个位置点吸收率

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
吸收率	0.000 0	2.612 3	6.696 3	0.000 0	0.000 0	3.036 3	6.449 4	0.000 0	8.391 1	0.000 0

3 误差分析与讨论

在本研究中，因为 CT 成像是离散过程，这就使得公式（5）的连续积分变为离散求和. 此外，单次旋转角度的间隔越大，采集的扫描数据越少，原始物体的信息损失越多. 同时，单次旋转角度决定了数据的角度分辨率误差，此误差进一步影响了标定模板的参数精度. 由于标定模板的参数将用于后续物体探测的计算依据，因此应尽可能地提高标定模板参数的精度.

模型和参数的确定需要选择数据来完成，比如本文中计算椭圆参数和函数拟合，以及计算未知物体参数时的数据组选定. 而选择不同模型、函数和数据，会带来不同的计算误差.

系统误差是影响 CT 系统精度的另一原因. 从系统成像数据中可以看到，探测器所接收到的数据具有一定的系统噪声，并且该噪声有正有负，没有明显的规律. 这类系统噪声是造成计算误差的另一个原因.

综合上述分析，如果要想进一步提升 CT 系统精度，减少计算误差，则可以从这些方面来开展工作：缩小单次旋转角度间隔、选择特定模板（比如半径成等差数列的圆）、降低系统热噪声、提高函数拟合精度等.

4 小结

本文探讨了 CT 的参数标定及成像问题. 首先，根据标定模板的椭圆特性，选取了两种特殊情况计算 CT 的旋转中心和单元探测器之间的间距，得到初始角度和单次旋转角度（旋转间隔）. 其次，依据 Radon 变换原理，对接收数据进行 Radon 逆变换，得到重构图像. 并对重构图像进行滤波，恢复出物体的原形. 最后，对所提出的模型进行误差分析，并提出相应的校正方法.

[参考文献]

[1] 全国大学生数学建模竞赛网. 2017 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题 [EB/OL]. [2018 - 11 - 09]. http://mcm.edu.cn/html_cn/block/8579f5fce999cdc896f78bca5d4f8237.html.

[2] 黄秋红，曹国华，赵敏，等. 静态锥束 CT 成像系统的几何标定方法研究 [J]. 仪器仪表学报，2015，36（10）：2339 - 2346.

[3] 闫士举，王蕴衡，仇庆. 非等中心锥束 CT 成像系统标定及三维重建 [J]. 中国医学影像技术，2014，30（11）：1739 - 1744.

[4] 石冶郝，余玉峰，程小红. CT 扫描中的数学：拉东（Radon）变换 [J]. 首都师范大学学报（自然科学版），2013，34（4）：15 - 18.

[5] 张俊，闫镔，陆利忠，等. 一种锥束 CT 系统几何参数标定方法 [J]. 核电子学与探测技术，2014，34（2）：235 - 238，242.

[6] 郭立倩. CT 系统标定与有限角度 CT 重建方法的研究 [D]. 大连：大连理工大学，2016.